

Plaquette 3 - Exponentielle complexe : produits, puissances, formules d'Euler

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Exercices

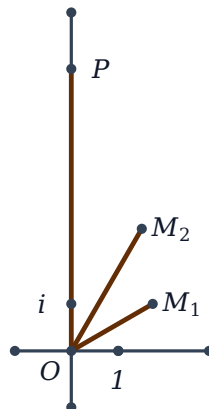
Méthode

La notation $e^{i\theta}$ obéit aux mêmes règles que l'exponentielle réelle : **multiplier, c'est ajouter les arguments** ; élever à la puissance n , c'est multiplier l'argument par n . Cela rend immédiats des calculs qui seraient très longs sous forme algébrique (une puissance 10^e , un quotient de racines), et permet de retrouver des formules de trigonométrie. Chaque résultat se lit aussi sur une figure : rotation et agrandissement.

Exercice 1 - Un produit lu sur la figure

Soit $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$, d'images M_1 et M_2 , et P l'image de z_1z_2 .

- Calculer z_1z_2 sous forme exponentielle puis algébrique.
- Expliquer, à l'aide de la figure, comment on passe de M_2 à P .



Les images de z_1 , z_2 et de leur produit.

Exercice 2 - Deux quotients

Soit $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme exponentielle, puis algébrique.

Exercice 3 - Deux écritures, un cosinus exact

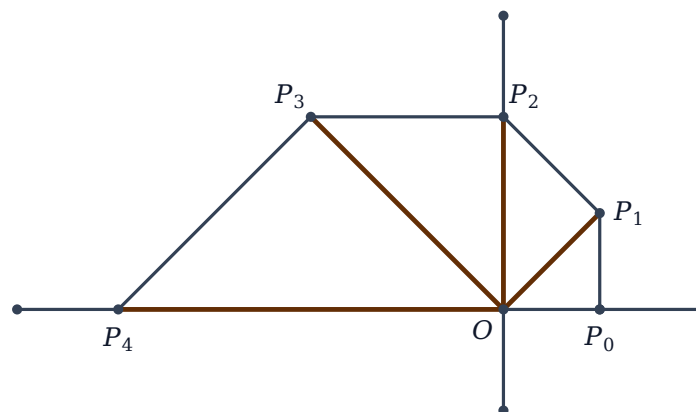
Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

- Calculer z_1z_2 sous forme algébrique.
- Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, puis z_1z_2 .
- En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$, et en donner une valeur approchée.

Exercice 4 – Les puissances de $1 + i$

On note P_n le point d'affixe $(1 + i)^n$. La figure montre P_0 à P_4 .

- Écrire $1 + i$ sous forme exponentielle, puis $(1 + i)^n$.
- Calculer $(1 + i)^2$, $(1 + i)^4$ et $(1 + i)^8$.
- Décrire comment on passe d'un point au suivant.



Les points P_0 à P_4 forment une spirale.

Exercice 5 – Des puissances élevées sans développer

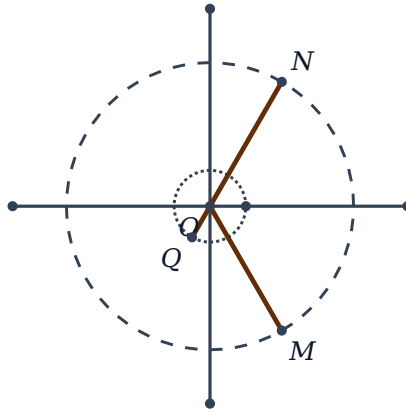
Calculer sous forme algébrique :

- $(1 + i\sqrt{3})^6$
- $(-1 + i)^{10}$

Exercice 6 - Conjugué et quotient par le conjugué

Soit $z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$, d'image M .

- Écrire sous forme exponentielle $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$, $z\bar{z}$ et $\frac{z}{\bar{z}}$.
- Placer les images N de $\bar{z}$ et Q de $\frac{z}{\bar{z}}$: vérifier sur la figure.



Les points M , N et Q ; cercles de rayons 1 et 4.

Exercice 7 - Un quotient et un second cosinus

Soit $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

- Écrire Z sous forme exponentielle.
- Écrire Z sous forme algébrique.
- En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 8 - Quand une puissance est-elle réelle ?

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et n un entier naturel non nul.

- Pour quelles valeurs de n le nombre z^n est-il un réel ? Donner la plus petite, et la valeur de z^n correspondante.
- Existe-t-il n tel que z^n soit imaginaire pur ?

Exercice 9 - Les formules d'Euler

- À partir de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, démontrer les formules d'Euler donnant $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
- En développant $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2$, montrer que $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.
- Vérifier cette formule pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.

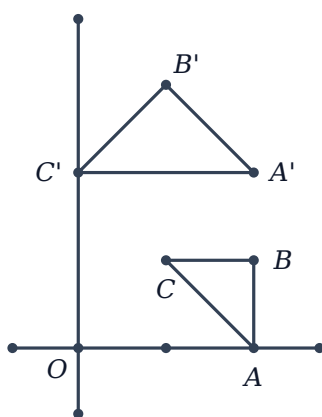
Exercice 10 - Retrouver les formules d'addition

- a) En écrivant $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ et en développant, retrouver les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
- b) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ en valeur exacte, en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 11 - Tourner et agrandir un triangle

Soit le triangle ABC avec $z_A = 2$, $z_B = 2 + i$, $z_C = 1 + i$. On multiplie chaque affixe par $w = 1 + i$ pour obtenir A' , B' , C' .

- a) Écrire w sous forme exponentielle et décrire la transformation géométrique.
- b) Calculer $z_{A'}$, $z_{B'}$, $z_{C'}$.
- c) Comparer les longueurs AB et $A'B'$.

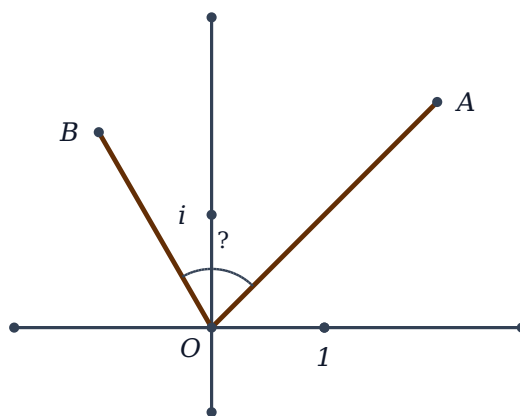


Le triangle ABC et son image $A'B'C'$.

Exercice 12 - Mesurer un angle par un quotient

Soit A et B d'affixes $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

- Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
- Calculer $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.
- En déduire la mesure en degrés de l'angle $A\hat{O}B$ et le rapport $\frac{OB}{OA}$.



L'angle $A\hat{O}B$ à mesurer.

Exercice 13 - Retrouver cos 3θ

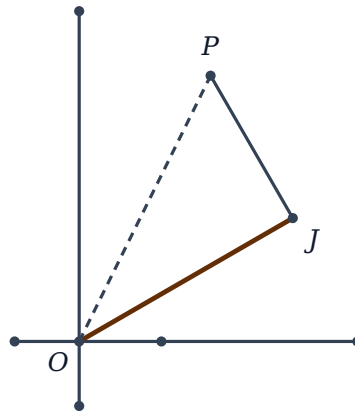
- Justifier que $\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$.
- En développant le membre de droite, montrer que $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.
- Vérifier la formule pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 14 - Le bras d'un robot

Un bras de robot plan est formé de deux segments articulés : le premier, de longueur 3 dm, part de la base O en faisant l'angle θ_1 avec l'axe des réels ; le second, de longueur 2 dm, fait l'angle θ_2 avec le prolongement du premier. La pince a pour affixe

$$z = 3e^{i\theta_1} + 2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Calculer z pour $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (forme algébrique, au centième).
- Calculer la distance de la pince à la base.



La base O , l'articulation J et la pince P .

Exercice 15 - Synthèse : un quotient remarquable

Soit $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

- Écrire z_1 , z_2 puis Z sous forme exponentielle.
- Écrire Z sous forme algébrique et en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- Calculer Z^{12} .