

Plaquette 5 - Filtres : fonction de transfert, gain et déphasage

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Exercices

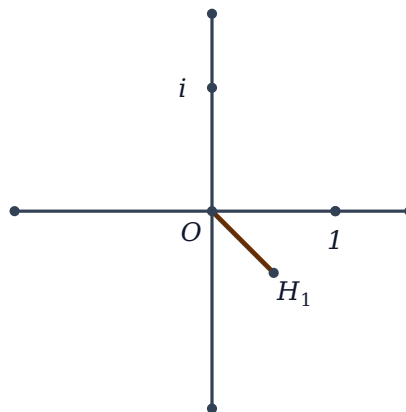
Méthode

Un filtre transforme un signal d'entrée sinusoïdal en un signal de sortie de même fréquence, mais **atténué** et **déphasé**. Tout est résumé par un nombre complexe, la **fonction de transfert** $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$: son module est le gain, son argument le déphasage. On calcule ici $\underline{H}$ sous forme exponentielle pour différentes fréquences, on trace son évolution, et on en déduit le signal de sortie ou les composants à choisir.

Exercice 1 - Le passe-bas à la fréquence de coupure

Un filtre passe-bas a pour fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + ix}$, où $x = \frac{f}{f_c}$.

- Calculer $\underline{H}$ pour $x = 1$ sous forme algébrique, puis exponentielle.
- En déduire le gain et le déphasage à la fréquence de coupure. Lire le point H_1 sur la figure.



L'image de $\underline{H}$ pour $x = 1$.

Exercice 2 - Gain et phase à plusieurs fréquences

Pour le passe-bas $\underline{H} = \frac{1}{1 + ix}$:

- Montrer que le gain vaut $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.
- Compléter le tableau (gain à 10^{-3} près, phase au centième de radian, à la calculatrice).

x	0,5	1	2	10
gain G				
phase φ (rad)				

c) Comment évoluent le gain et la phase quand la fréquence augmente ?

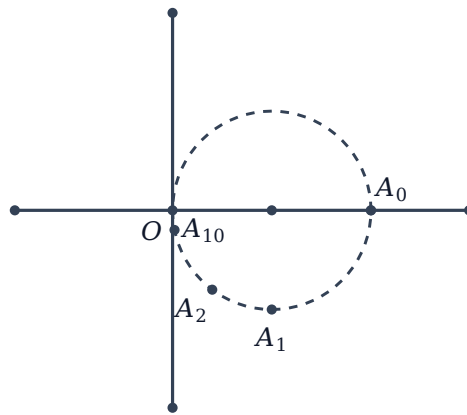
Exercice 3 - Un demi-cercle dans le plan complexe

Pour le passe-bas $\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + ix}$, la figure montre les points images A_0, A_1, A_2, A_{10} de $\underline{H}(0), \underline{H}(1), \underline{H}(2)$ et $\underline{H}(10)$.

a) Calculer ces quatre valeurs sous forme algébrique (au millième si nécessaire).

b) Montrer que $\underline{H} - \frac{1}{2} = \frac{1 - ix}{2(1 + ix)}$, et en déduire que $\left| \underline{H} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

c) Interpréter géométriquement.



Quatre valeurs de $\underline{H}$ et le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

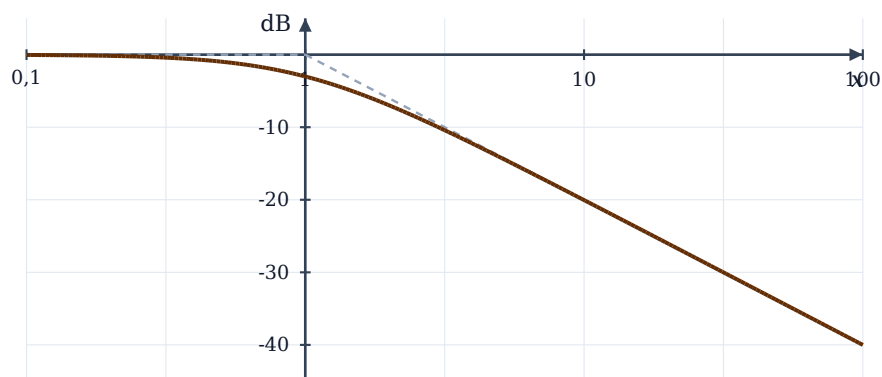
Exercice 4 - Le diagramme de Bode du gain

Le graphique donne le gain en décibels $G_{dB} = 20 \log G$ du passe-bas, en fonction de x sur une échelle logarithmique (graduations 0,1 ; 1 ; 10 ; 100).

a) Calculer G_{dB} pour $x = 1$, $x = 10$ et $x = 100$ (au dixième).

b) Pour x grand, justifier que $G \approx \frac{1}{x}$, puis que $G_{dB} \approx -20 \log x$.

c) De combien de décibels le gain diminue-t-il quand la fréquence est multipliée par 10 au-delà de la coupure ?

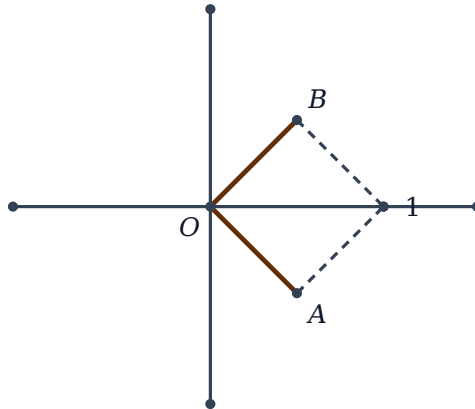


Gain en décibels (courbe) et ses deux asymptotes (pointillés).

Exercice 5 - Passe-bas et passe-haut

On compare $\underline{H}_b = \frac{1}{1 + ix}$ (passe-bas) et $\underline{H}_h = \frac{ix}{1 + ix}$ (passe-haut).

- Calculer $\underline{H}_h$ pour $x = 1$ sous forme exponentielle. Placer son image B à côté de celle A de $\underline{H}_b(1)$.
- Montrer que $\underline{H}_b + \underline{H}_h = 1$ pour tout x .
- Que valent $\underline{H}_h$ quand x est très petit, et quand x est très grand ?



Les images A et B de $\underline{H}_b(1)$ et $\underline{H}_h(1)$.

Exercice 6 - Dimensionner un filtre RC

Un filtre passe-bas RC utilise $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$.

- Calculer sa fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ (au dixième de hertz).
- Calculer son gain pour un signal de 50 Hz, puis pour un signal de 10 kHz (au millième).
- Conclure sur le rôle de ce filtre.

Exercice 7 - Le retard de la sortie

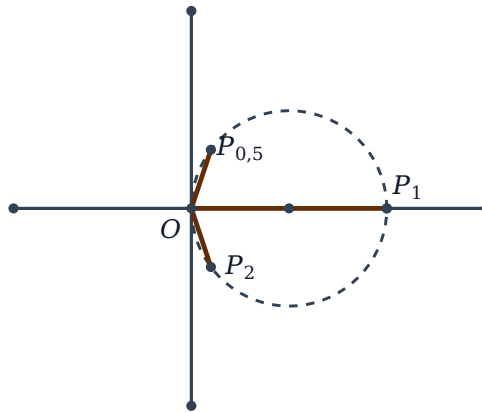
Pour le filtre précédent ($f_c \approx 1\,591,5 \text{ Hz}$), on applique un signal à la fréquence de coupure.

- Rappeler le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.
- Calculer le retard temporel de la sortie, en microsecondes. Quelle fraction de période représente-t-il ?

Exercice 8 - Un filtre passe-bande

Un filtre passe-bande RLC a pour fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + 2i\left(x - \frac{1}{x}\right)}$.

- Calculer $\underline{H}$ pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 0,5$ sous forme algébrique.
- Calculer les gains correspondants (au millième). Que remarque-t-on ?
- Placer les trois images sur la figure et commenter leur position.



Images de $\underline{H}$ pour $x = 1, 2$ et $0,5$.

Exercice 9 - Largeur de la bande passante

Pour le passe-bande de l'exercice précédent, on appelle bande passante l'intervalle des x où $G(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Montrer que $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ équivaut à $2\left|x - \frac{1}{x}\right| = 1$.
- Vérifier que $x_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$ conviennent, et en donner des valeurs approchées.
- Calculer la largeur $x_2 - x_1$.

Exercice 10 - Deux filtres en cascade

On place à la suite deux passe-bas identiques de fonction $\frac{1}{1 + ix}$; on admet que la fonction de transfert de l'ensemble est leur produit, $\underline{H} = \frac{1}{(1 + ix)^2}$.

- Calculer $\underline{H}$ pour $x = 1$ sous forme exponentielle, puis algébrique.
- Donner le gain en décibels à $x = 1$ (au dixième) et comparer avec un seul filtre.

Exercice 11 - Du signal d'entrée au signal de sortie

Un passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 1\,000$ Hz reçoit $e(t) = 5 \cos(2\pi \times 1\,000 t)$ (en V).

- Calculer $\underline{H}$ à cette fréquence sous forme exponentielle.

b) En déduire $\underline{S} = \underline{H}\underline{E}$ puis $s(t)$ (amplitude au centième).

Exercice 12 - Filtrer un bruit

Un capteur délivre un signal utile de fréquence $f_1 = 0,1 f_c$ et d'amplitude 2 V, pollué par un bruit de fréquence $f_2 = 10 f_c$ et de même amplitude. On les fait passer dans le passe-bas $\frac{1}{1 + ix}$.

- Calculer le gain pour chacune des deux fréquences (au millième).
- En déduire les amplitudes du signal et du bruit en sortie.
- Le déphasage subi par le signal utile est-il gênant ?

Exercice 13 - Retrouver une résistance

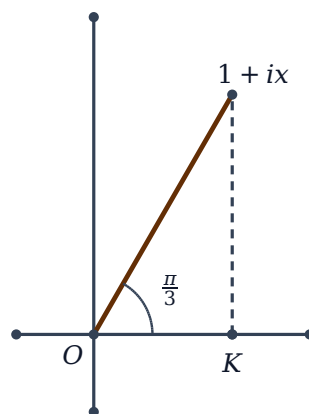
Sur un passe-bas RC avec $C = 100$ nF, on mesure un gain de 0,5 à la fréquence 2 000 Hz.

- Montrer que $x = \sqrt{3}$ à cette fréquence.
- En déduire la fréquence de coupure puis la valeur de R (à l'ohm près).

Exercice 14 - Imposer un déphasage

Pour le passe-bas $\underline{H} = \frac{1}{1 + ix}$ ($x > 0$), on cherche la fréquence où la sortie est en retard de $\frac{\pi}{3}$ sur l'entrée.

- Justifier qu'il faut $\arg(1 + ix) = \frac{\pi}{3}$.
- En écrivant $1 + ix = r\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, montrer que $x = \sqrt{3}$.
- Avec $f_c \approx 1\,591,5$ Hz, donner la fréquence cherchée (au dixième) et le gain à cette fréquence.



Le complexe $1 + ix$ doit faire l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des réels.

Exercice 15 - Synthèse : le filtre d'une enceinte

Une enceinte à deux voies envoie les graves au boomer par un passe-bas $\underline{H}_b = \frac{1}{1 + ix}$ et les aigus au tweeter par un passe-haut $\underline{H}_h = \frac{ix}{1 + ix}$, avec $x = \frac{f}{2\,000}$.

- Pour $f = 500$ Hz, calculer les gains des deux voies (au millième). Qui reproduit surtout ce son ?
- Pour $f = 2\,000$ Hz, donner $\underline{H}_b$ et $\underline{H}_h$ sous forme exponentielle. Quel est le déphasage entre les deux voies ?
- Montrer que, quelle que soit la fréquence, la somme des deux signaux de sortie redonne exactement le signal d'entrée.