

Plaquette 2 - Forme exponentielle et plan complexe : lire, placer, tourner

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Exercices

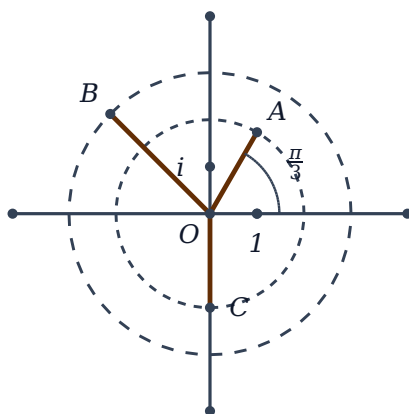
Méthode

Dans $z = r e^{i\theta}$, le module r est une **distance** à l'origine et l'argument θ un **angle** mesuré depuis l'axe des réels. La forme exponentielle se lit donc directement sur une figure. On apprend ici à passer d'une forme à l'autre, à placer des points, et à voir qu'une multiplication par $e^{i\alpha}$ est une **rotation** d'angle α autour de l'origine.

Exercice 1 - Lire module et argument

Sur la figure, les cercles de centre O ont pour rayons 2 et 3. Les angles repérés depuis l'axe des réels valent $\frac{\pi}{3}$ pour A et $\frac{3\pi}{4}$ pour B ; le point C est sur l'axe des imaginaires, sur le cercle de rayon 2.

Écrire les affixes de A , B et C sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.



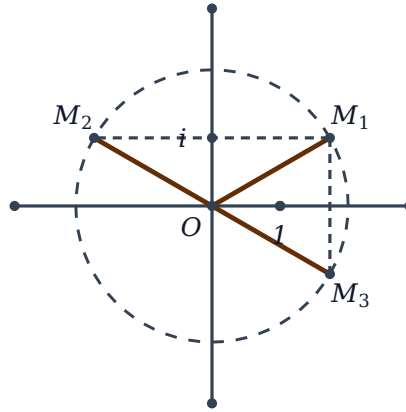
Trois points images ; cercles de rayons 2 et 3.

Exercice 2 - Trois points sur un même cercle

On considère $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_3 = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$, représentés par les points M_1 , M_2 , M_3 .

a) Écrire chacun sous forme algébrique.

b) Montrer que $z_3 = \overline{z_1}$ et que $z_2 = -\overline{z_1}$. Interpréter sur la figure.



Les trois points sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 3 - Un argument non remarquable

Écrire sous forme exponentielle (argument au centième de radian si nécessaire) :

a) $z_1 = 3 + 4i$ · b) $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ · c) $z_3 = -1 - i$

Exercice 4 - Retour à la forme algébrique

Écrire sous forme algébrique :

a) $4 e^{i\frac{5\pi}{6}}$ · b) $2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$ · c) $3 e^{2i\pi}$ · d) $10 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 5 - Un module n'est jamais négatif

a) Simplifier l'argument de $e^{i\frac{7\pi}{3}}$ et de $5 e^{-i\frac{9\pi}{4}}$ pour le ramener dans $] -\pi ; \pi]$.

b) Un élève écrit que $z = -2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ est « sous forme exponentielle, de module -2 ». Corriger et donner la vraie forme exponentielle de z .

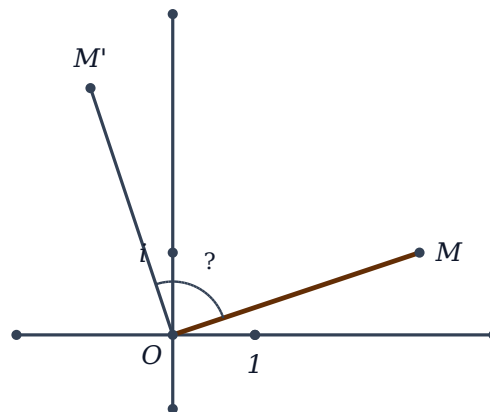
Exercice 6 - Multiplier par i , c'est tourner

Soit M le point d'affixe $z = 3 + i$ et M' le point d'affixe iz .

a) Calculer iz sous forme algébrique.

b) Justifier à l'aide de la forme exponentielle que $OM' = OM$ et que l'angle de $\overrightarrow{OM}$ à $\overrightarrow{OM'}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

c) Placer le point M'' d'affixe i^2z et donner son affixe.



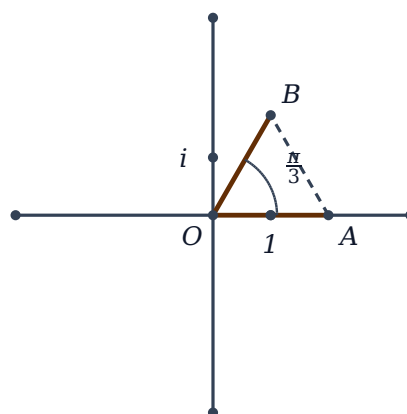
Le point M et son image M' .

Exercice 7 - Construire un triangle équilatéral

Soit A le point d'affixe $z_A = 2$ et B son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Calculer z_B sous forme exponentielle puis algébrique.

b) Calculer AB et montrer que le triangle OAB est équilatéral.

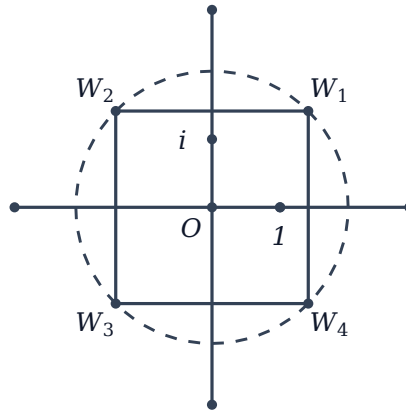


La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie A sur B .

Exercice 8 - Conjugué, opposé et symétries

Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et les points P, Q, R, S d'affixes respectives $z, \bar{z}, -z, -\bar{z}$.

- Écrire ces quatre affixes sous forme exponentielle.
- Identifier chaque point sur la figure.
- Quelle est la nature du quadrilatère $PSRQ$? Calculer son périmètre.



Quatre points W_1 à W_4 sur le cercle de rayon 2 : lesquels sont P, Q, R, S ?

Exercice 9 - Résoudre une équation par identification

On cherche les complexes $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) tels que $z^2 = 4i$.

- Écrire $4i$ sous forme exponentielle et exprimer z^2 en fonction de r et θ .
- En déduire les deux solutions, sous forme exponentielle puis algébrique.

Exercice 10 - Ensembles de points

Décrire l'ensemble des points M d'affixe z (non nulle pour b et c) tels que :

- $|z| = 3$ · b) $\arg z = \frac{\pi}{4}$ (à 2π près) · c) $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $1 \leq r \leq 3$

Exercice 11 - Les trois solutions de $z^3 = 1$

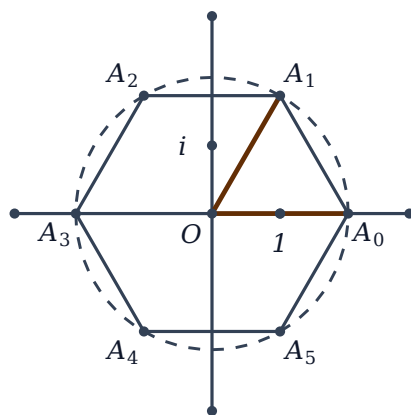
On cherche les complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $z^3 = 1$.

- Montrer que $r = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, k entier.
- Donner les trois solutions distinctes sous forme algébrique.
- Montrer que leurs points images forment un triangle équilatéral et calculer son côté.

Exercice 12 - Les sommets d'un hexagone

Les sommets d'un hexagone régulier de centre O ont pour affixes $a_k = 2 e^{i \frac{k\pi}{3}}$, pour $k = 0, 1, \dots, 5$.

- Écrire a_0, a_1, a_2 et a_3 sous forme algébrique.
- Calculer la longueur d'un côté, puis le périmètre de l'hexagone.
- Par quel nombre complexe faut-il multiplier a_k pour obtenir a_{k+1} ?



L'hexagone régulier $A_0A_1\dots A_5$ inscrit dans le cercle de rayon 2.

Exercice 13 - Distance entre deux points images

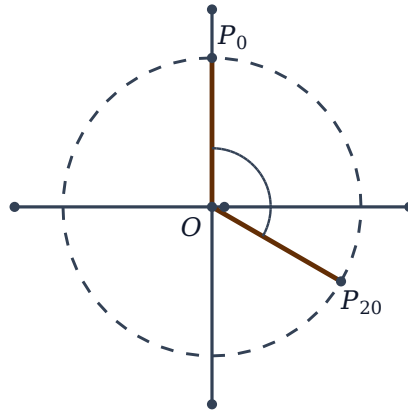
Soit A et B d'affixes $z_A = 2 e^{i \frac{\pi}{2}}$ et $z_B = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$.

- Écrire z_A et z_B sous forme algébrique.
- Calculer AB .
- Quelle est la nature du triangle OAB ? Retrouver ce résultat à partir des seules formes exponentielles.

Exercice 14 - L'aiguille des minutes

Dans un repère centré sur l'axe d'une horloge (unité : le cm), l'extrémité de l'aiguille des minutes, longue de 12 cm, a pour affixe $z_0 = 12i$ à midi pile.

- Écrire z_0 sous forme exponentielle.
- L'aiguille tourne dans le sens **horaire**. De quel angle a-t-elle tourné au bout de 20 minutes ? En déduire l'affixe z_{20} de son extrémité, sous forme exponentielle puis algébrique (au centième).
- Où est l'extrémité à 12 h 45 ?



Position de l'extrémité à midi (P_0) et à midi vingt (P_{20}) ; rayon 12 cm.

Exercice 15 - Synthèse : un triangle rectangle isocèle

Soit A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + i$, B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et C le symétrique de A par rapport à O .

- Écrire z_A sous forme exponentielle.
- En déduire z_B et z_C sous forme exponentielle, puis algébrique.
- Calculer AB , BC et AC . Quelle est la nature du triangle ABC ?