

Plaquette 4 - Signaux sinusoïdaux et amplitudes complexes

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Un signal $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ est entièrement décrit, à pulsation connue, par deux nombres : son amplitude U et sa phase φ . On les réunit dans l'**amplitude complexe** $\underline{U} = U e^{i\varphi}$, représentée par un vecteur (diagramme de Fresnel). Additionner deux signaux de même fréquence revient alors à additionner deux complexes, et dériver un signal à le multiplier par $i\omega$.

Exercice 1 - Du signal à l'amplitude complexe

Donner l'amplitude complexe de chaque signal de pulsation ω , puis identifier son vecteur sur le diagramme de Fresnel.

a) $u(t) = 5 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ · b) $i(t) = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ · c) $v(t) = 3 \sin(\omega t)$

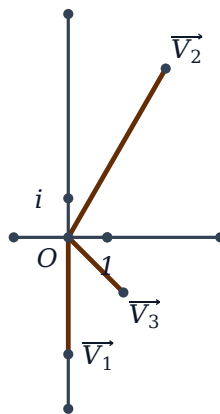


Diagramme de Fresnel : trois vecteurs à identifier.

Exercice 2 - De l'amplitude complexe au signal

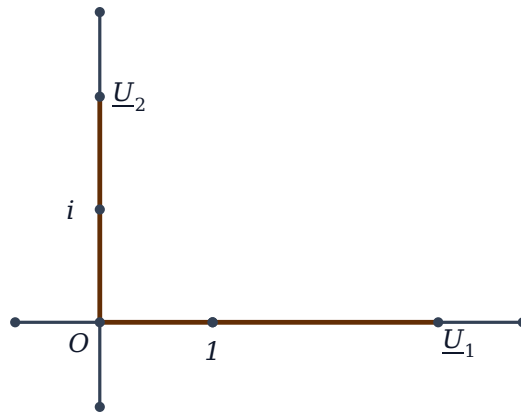
Un signal de fréquence 50 Hz a pour amplitude complexe $\underline{U} = 4 e^{-i\frac{\pi}{6}}$ (en V).

- Calculer la pulsation ω .
- Écrire $u(t)$.
- Calculer $u(0)$ et le premier instant positif où u est maximale.

Exercice 3 - Lire un diagramme de Fresnel

Le diagramme représente les amplitudes complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ de deux tensions de pulsation $\omega = 200$ rad/s (graduation : 1 V par unité).

- Lire les amplitudes et les phases, puis écrire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
- Quel est le déphasage entre les deux tensions ? Laquelle est en avance ?
- À quel décalage temporel ce déphasage correspond-il ?

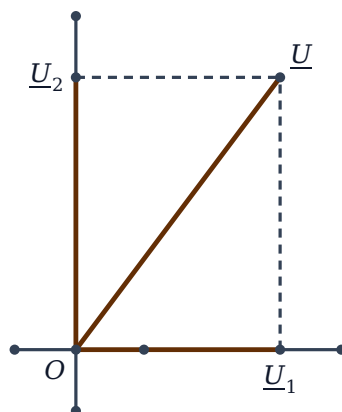


Deux vecteurs de Fresnel (1 V par unité).

Exercice 4 - Additionner deux signaux

On additionne $u_1(t) = 3 \cos(\omega t)$ et $u_2(t) = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

- Écrire les amplitudes complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$, puis $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$.
- En déduire l'amplitude et la phase (au centième de radian) du signal somme $u = u_1 + u_2$.
- L'amplitude de la somme est-elle égale à la somme des amplitudes ?



La somme des vecteurs de Fresnel (règle du parallélogramme).

Exercice 5 - Une somme qui garde l'amplitude

Écrire sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$ le signal

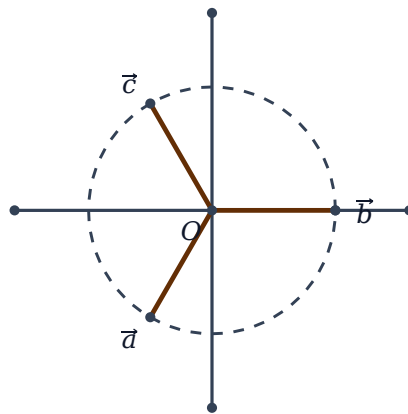
$$s(t) = 2 \cos(\omega t) + 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice 6 - Le triphasé

Un réseau triphasé fournit trois tensions de même amplitude U , décalées d'un tiers de tour :

$$u_1 = U \cos(\omega t) \quad u_2 = U \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad u_3 = U \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

- Écrire les trois amplitudes complexes et les identifier sur la figure.
- Calculer $1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ sous forme algébrique.
- En déduire la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$ à tout instant. Quel est l'intérêt pratique ?



Les trois vecteurs du triphasé (amplitude U prise pour unité).

Exercice 7 - Dériver, c'est multiplier par $i\omega$

Soit $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$.

- Calculer $u'(t)$ et l'écrire sous la forme $A \cos(\omega t + \psi)$.
- Montrer que l'amplitude complexe de u' est $i\omega \underline{U}$.
- Application : $u(t) = 10 \cos(100t)$. Donner l'amplitude complexe de u' puis $u'(t)$.

Exercice 8 - Primitiver, c'est diviser par $i\omega$

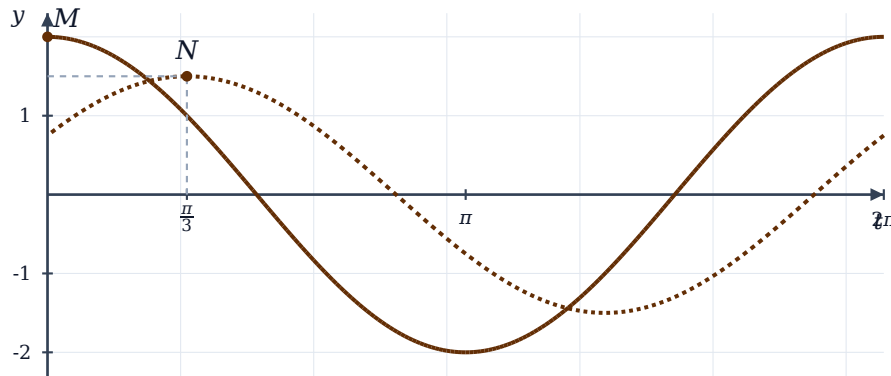
Un courant $i(t) = 2 \cos(50t)$ (en A) charge un condensateur ; la charge q vérifie $q'(t) = i(t)$ et n'a pas de composante constante.

- Montrer que l'amplitude complexe de q est $\underline{Q} = \frac{I}{i\omega}$ et la calculer.
- En déduire $q(t)$, et vérifier en dérivant.

Exercice 9 - Lire un déphasage sur des courbes

Le graphique montre une tension u (amplitude 2) et un courant i (amplitude 1,5) de pulsation $\omega = 1$ rad/s, en fonction du temps t . Le point M est le premier maximum de u , le point N celui de i .

- Lire le décalage temporel entre M et N . Quel signal est en retard ?
- En déduire le déphasage, puis les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ (en prenant la phase de u nulle).



Tension u (trait plein) et courant i (pointillés).

Exercice 10 - Loi des mailles avec une bobine

Une résistance $R = 10 \, \Omega$ et une bobine d'inductance L sont en série, avec $L\omega = 10 \, \Omega$. Le courant a pour amplitude complexe $\underline{I} = 1$ (en A).

- Calculer $\underline{U}_R = R\underline{I}$ et $\underline{U}_L = iL\omega\underline{I}$.
- En déduire la tension totale $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$ sous forme exponentielle.
- Quelle est l'amplitude de la tension totale ? De combien est-elle en avance sur le courant ?

Exercice 11 - Tension aux bornes d'un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 100 \, \mu\text{F}$ est traversé par un courant d'amplitude complexe $\underline{I} = 0,5$ A, à la fréquence 50 Hz.

- Calculer $\frac{1}{C\omega}$ (au centième).
- Calculer $\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{iC\omega}$ sous forme algébrique puis exponentielle.
- Écrire $u_C(t)$ et comparer sa phase à celle du courant.

Exercice 12 - Puissance moyenne et déphasage

Un appareil reçoit une tension d'amplitude $U = 325$ V et un courant d'amplitude $I = 2$ A, le courant étant en retard de $\frac{\pi}{6}$ sur la tension.

- Écrire $\underline{U}$ et $\underline{I}$ en prenant la phase de la tension nulle.
- Calculer la puissance moyenne reçue, au dixième de watt.
- Quelle serait-elle si le courant était en quadrature avec la tension ?

Exercice 13 - Retrouver amplitude et phase

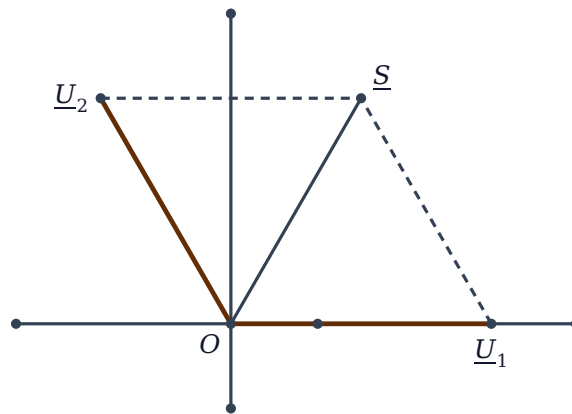
Une tension $u(t) = A \cos(100t + \varphi)$, avec $A > 0$, vérifie $u(0) = 3 \text{ V}$ et $u'(0) = -400 \text{ V/s}$.

- Montrer que $A \cos \varphi = 3$ et $A \sin \varphi = 4$.
- En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$, puis A et φ (au centième).

Exercice 14 - Interférences constructives et destructives

Deux haut-parleurs produisent au même point les signaux $3 \cos(\omega t)$ et $3 \cos(\omega t + \varphi)$.

- Montrer que l'amplitude complexe de la somme s'écrit $3e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi}{2}})$, et en déduire que l'amplitude de la somme vaut $6 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$.
- Calculer cette amplitude pour $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ et π .
- Expliquer le principe d'un casque anti-bruit.



Le cas $\varphi = \frac{2\pi}{3}$: somme des deux vecteurs.

Exercice 15 - Synthèse : un circuit RL alimenté

Un circuit série comporte $R = 6 \Omega$ et une bobine telle que $L\omega = 8 \Omega$. Il est alimenté par $u(t) = 12 \cos(1\,000 t)$ (en V).

- Écrire l'impédance $\underline{Z} = R + iL\omega$ sous forme exponentielle (argument au centième).
- Calculer $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ et en déduire $i(t)$.
- Calculer les amplitudes des tensions aux bornes de R et de la bobine. Leur somme vaut-elle 12 V ? Vérifier que les amplitudes complexes, elles, s'additionnent bien en $\underline{U}$.