

MATHÉMATIQUES

Nombres complexes : forme exponentielle

Terminale STI2D

Forme exponentielle • $e^{i\theta}$ • Module et argument • Produit et quotient
Formules d'addition • Linéarisation • Signaux sinusoïdaux • Rotation • $z^2 = a$

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Nombres complexes ». Il prolonge le cours de première et couvre :

- notation $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; forme exponentielle $z = re^{i\theta}$; passage d'une forme à l'autre ;
- produit, quotient, puissance sous forme exponentielle ;
- formules d'addition et de duplication ; linéarisation de $\cos^2$ et $\sin^2$;
- somme $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$;
- transformations $z \mapsto z + b$ et $z \mapsto az$; équations $az + b = 0$ et $z^2 = a$ (a réel).

Objectif : écrire un complexe sous forme exponentielle, calculer produits et quotients, démontrer les formules de trigonométrie et additionner des signaux sinusoïdaux de même pulsation.

Table des matières

1	Forme exponentielle	3
2	Formules de trigonométrie	3
3	Somme de signaux sinusoïdaux	4
4	Géométrie et équations	4
5	Erreurs classiques	4
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	5
8	Corrigés des exercices	5

1. Forme exponentielle

Notation $e^{i\theta}$

Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. C'est le complexe de module 1 et d'argument θ . Tout complexe non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}; \quad -2 = 2e^{i\pi}; \quad 3i = 3e^{i\pi/2}; \quad 2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Règles de calcul

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Donc $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$: les modules se multiplient, les arguments s'additionnent.

$$z_1 = 2e^{i\pi/6}, \quad z_2 = 3e^{i\pi/3} : z_1 z_2 = 6e^{i\pi/2} = 6i; \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}e^{i\pi/6}; \quad z_1^3 = 8e^{i\pi/2} = 8i.$$

2. Formules de trigonométrie

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$. On identifie avec $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$.

Duplication et linéarisation

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a; \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a. \quad \text{D'où}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

Une primitive

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ a pour primitive $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. Ainsi la valeur moyenne de $\cos^2$ sur une période est $\frac{1}{2}$: c'est l'origine du facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des valeurs efficaces.

3. Somme de signaux sinusoïdaux

Écrire $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$

D'après la formule d'addition, $A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$. Il faut donc $a = A \cos \varphi$ et $b = -A \sin \varphi$, c'est-à-dire

$$\boxed{a - ib = Ae^{i\varphi}} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La somme de deux signaux de même pulsation est un signal de même pulsation.

$$\sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t) : a - ib = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}, \text{ donc } \sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Géométrie et équations

Transformations du plan

- $z \mapsto z + b$: translation de vecteur d'affixe b ;
- $z \mapsto kz$ (k réel non nul) : homothétie de centre O et de rapport k ;
- $z \mapsto e^{i\theta}z$: rotation de centre O et d'angle θ .

La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie le point d'affixe $3 + i$ sur $i(3 + i) = -1 + 3i$.

Équations

- $az + b = 0$ ($a \neq 0$) : $z = -\frac{b}{a}$, mis sous forme algébrique avec le conjugué. Exemple : $(1 + i)z = 3 - i$ donne $z = \frac{(3-i)(1-i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$.
- $z^2 = a$ (a réel) : si $a \geq 0$, $z = \pm\sqrt{a}$; si $a < 0$, $z = \pm i\sqrt{-a}$. Exemple : $z^2 = -9 \iff z = 3i$ ou $z = -3i$.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Additionner les modules d'une somme : $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ en général.
- Multiplier les arguments au lieu de les additionner.
- Se tromper de signe dans $a - ib = Ae^{i\varphi}$.
- Oublier la seconde solution de $z^2 = a$.

6. Fiche de synthèse

Forme exponentielle	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ; z = re^{i\theta}$
Produit, quotient	$rr'e^{i(\theta+\theta')} ; \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
Addition	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ; \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
Linéarisation	$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} ; \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
Signaux	$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $a - ib = Ae^{i\varphi}$
Transformations	$z + b$: translation ; kz : homothétie ; $e^{i\theta}z$: rotation

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Forme exponentielle

Écrire $-1 + i$ et $-\sqrt{3} - i$ sous forme exponentielle.

Exercice 2 – Valeur exacte

En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 – Signal

Écrire $s(t) = \cos(100\pi t) + \sin(100\pi t)$ sous la forme $A \cos(100\pi t + \varphi)$.

Exercice 4 – Équation

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -16$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $-1 + i = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$; $-\sqrt{3} - i = 2e^{-5i\pi/6}$ (module 2, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = -\frac{1}{2}$).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (on utilise $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $a = 1$, $b = 1$: $a - ib = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$. Donc $s(t) = \sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $z = 4i$ ou $z = -4i$.