

Plaquette 3 - Arbres pondérés et probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construire l'arbre. Le **premier** niveau porte la cause (atelier, fournisseur, état réel), le **second** la conséquence (défaut, alarme, résultat du test).

Les deux règles.

— **Règle 1. Le long d'un chemin, on multiplie :**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

— **Règle 2. Entre les chemins, on additionne :** la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent.

Contrôle systématique. La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.

Formule des probabilités totales. Avec la partition $\{A; \bar{A}\}$:

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Avec trois causes A_1, A_2, A_3 formant une partition :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

Remonter l'arbre. Pour retrouver la cause à partir de la conséquence :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

— Le numérateur est **un** chemin.

— Le dénominateur est la **somme de tous** les chemins menant à B .

△ On ne peut appliquer la formule des probabilités totales que si les causes forment une **partition** : deux à deux incompatibles, et couvrant tous les cas.

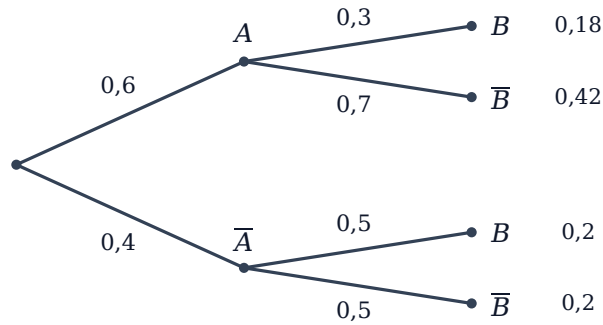
Correction de l'exercice 1 - Lire un arbre

On complète d'abord les branches par le complément à 1 : $P(\bar{A}) = 0,4$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$. Puis on **multiplie** le long de chaque chemin :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

$$- P(A \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42 ;$$

- $P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$;
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$.



L'arbre de l'exercice

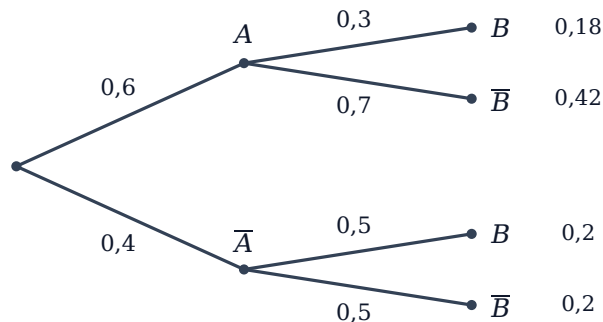
Contrôle. $0,18 + 0,42 + 0,2 + 0,2 = 1$: les quatre chemins couvrent toutes les issues.

Réponse. $0,18$; $0,42$; $0,2$; $0,2$.

Correction de l'exercice 2 - Probabilités totales

Deux chemins de l'arbre mènent à B ; ils sont incompatibles, on les **additionne** :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$



Deux chemins mènent à B

$$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = 0,18 + 0,2 = 0,38$$

Contrôle de vraisemblance. $P(B)$ est compris entre les deux branches $0,3$ et $0,5$: c'est une moyenne pondérée par $P(A)$ et $P(\bar{A})$.

Réponse. $P(B) = 0,38$.

Correction de l'exercice 3 - Remonter l'arbre

On cherche une probabilité « à l'envers » de l'arbre ; on revient à la définition :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Le numérateur est **un** chemin, $P(A \cap B) = 0,18$; le dénominateur est la **somme** des chemins menant à B , $P(B) = 0,38$.

$$P_B(A) = \frac{0,18}{0,38} = \frac{9}{19} \approx 0,474$$

Comparaison. $P(A) = 0,6$ mais $P_B(A) \approx 0,474$: savoir que B est réalisé rend A moins

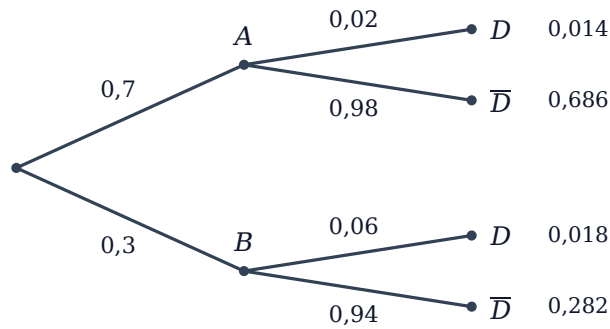
probable, car B est plus fréquent sous $\bar{A}$ (0,5) que sous A (0,3).

Réponse. $P_B(A) = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Correction de l'exercice 4 - Construire un arbre à partir d'un énoncé

On note A , B les fournisseurs et D « la pièce est défectueuse ».

L'arbre. Le premier niveau porte la provenance : $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,3$. Le second niveau porte l'état **sachant** la provenance : $P_A(D) = 0,02$, $P_B(D) = 0,06$, et leurs compléments 0,98 et 0,94.



Fournisseur puis défaut

Probabilité d'un défaut. Deux chemins mènent à D :

$$P(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,06 = 0,014 + 0,018 = 0,032$$

3,2 % des pièces reçues sont défectueuses.

Réponse. $P(D) = 0,032$.

Correction de l'exercice 5 - Remonter au fournisseur

On remonte l'arbre de l'exercice précédent :

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,06}{0,032} = \frac{0,018}{0,032} = 0,5625$$

Une pièce défectueuse vient de B dans 56,25 % des cas.

Lecture. B ne fournit que 30 % des pièces, mais plus de la moitié des pièces défectueuses : son taux de défaut est trois fois plus élevé que celui de A.

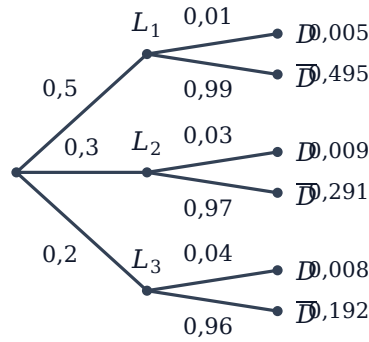
Contrôle. $P_D(A) = \frac{0,014}{0,032} = 0,4375$, et $0,4375 + 0,5625 = 1$.

Réponse. $P_D(B) = 0,5625$.

Correction de l'exercice 6 - Trois causes

Les trois lignes forment une **partition** (chaque pièce vient d'une ligne et d'une seule, et $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$). On applique la formule des probabilités totales avec trois causes :

$$P(D) = P(L_1)P_{L_1}(D) + P(L_2)P_{L_2}(D) + P(L_3)P_{L_3}(D)$$



Trois lignes formant une partition

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,03 + 0,2 \times 0,04 = 0,005 + 0,009 + 0,008 = 0,022$$

Le taux global de défauts est de 2,2 %, compris entre le meilleur taux (1 %) et le pire (4 %).

Réponse. $P(D) = 0,022$.

Correction de l'exercice 7 - Remonter avec trois causes

On remonte l'arbre :

$$P_D(L_2) = \frac{P(L_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,022} = \frac{0,009}{0,022} = \frac{9}{22} \approx 0,409$$

Environ 41 % des pièces défectueuses viennent de la ligne 2.

Comparaison des trois lignes. $P_D(L_1) = \frac{0,005}{0,022} \approx 0,227$ et $P_D(L_3) = \frac{0,008}{0,022} \approx 0,364$: la ligne 2 est la plus représentée parmi les défauts, et la somme des trois vaut 1.

Réponse. $P_D(L_2) = \frac{9}{22} \approx 0,409$.

Correction de l'exercice 8 - Compléter un arbre

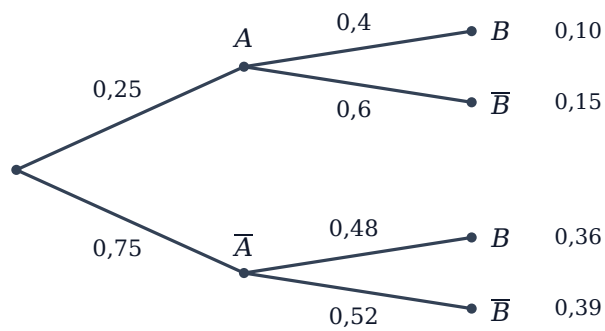
a) On connaît le chemin $P(A \cap B)$ et la branche $P(A)$: la définition donne la branche du second niveau.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$$

b) L'événement B se partage entre les deux chemins :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,46 - 0,10 = 0,36. \text{ Avec } P(\bar{A}) = 0,75 :$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,36}{0,75} = 0,48$$



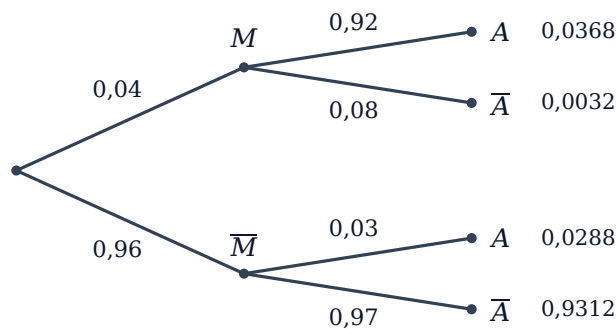
L'arbre reconstitué

Vérification. $0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,48 = 0,1 + 0,36 = 0,46 = P(B)$.

Réponse. $P_A(B) = 0,4$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,48$.

Correction de l'exercice 9 - Un test de détection

On note M « la machine est en panne » et A « l'alarme se déclenche » : $P(M) = 0,04$, $P_M(A) = 0,92$, $P_{\bar{M}}(A) = 0,03$.

Panne (M) puis alarme (A)

L'alarme se déclenche par deux chemins incompatibles ; on les additionne :

$$P(A) = 0,04 \times 0,92 + 0,96 \times 0,03 = 0,0368 + 0,0288 = 0,0656$$

L'alarme se déclenche dans environ 6,6 % des cas. Les fausses alarmes (0,0288) sont presque aussi fréquentes que les vraies (0,0368), parce que les machines en bon état sont très nombreuses.

Réponse. $P(A) = 0,0656$.

Correction de l'exercice 10 - La valeur prédictive

On remonte l'arbre du capteur :

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0,0368}{0,0656} \approx 0,561$$

Quand l'alarme se déclenche, il y a réellement une panne dans environ 56 % des cas seulement.

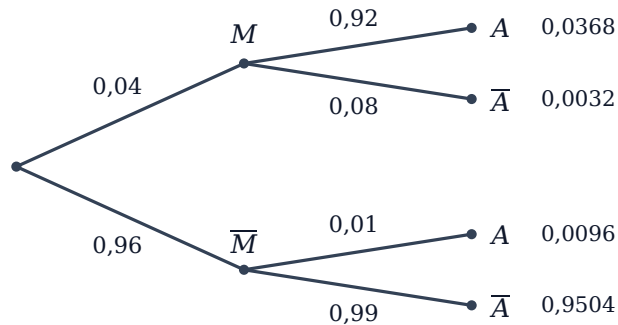
Commentaire. Le capteur est sensible (92 % des pannes détectées), mais la panne est rare (4 %) : les 3 % de fausses alertes, appliquées aux 96 % de machines en bon état,

pèsent presque autant que les vraies alertes. C'est cette **valeur prédictive** qui compte pour le technicien qui reçoit l'alarme.

Réponse. $P_A(M) \approx 0,561$.

Correction de l'exercice 11 – Améliorer le capteur

Seule la branche $P_{\bar{M}}(A)$ change : elle passe à 0,01.



Capteur amélioré : 1 % de fausses alertes

$$P(A) = 0,04 \times 0,92 + 0,96 \times 0,01 = 0,0368 + 0,0096 = 0,0464$$

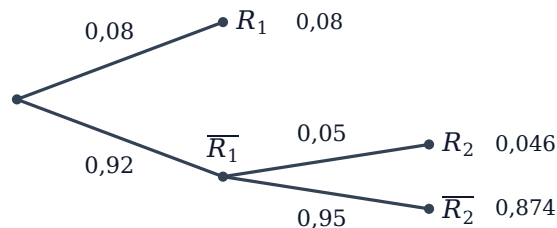
$$P_A(M) = \frac{0,0368}{0,0464} \approx 0,793$$

Bilan. Diviser par trois le taux de fausses alertes fait passer la valeur prédictive de 56 % à 79 %, sans toucher à la sensibilité. Pour un événement rare, c'est la réduction des fausses alertes qui rend une alarme crédible.

Réponse. $P_A(M) \approx 0,793$ (contre 0,561).

Correction de l'exercice 12 – Deux étapes de contrôle

On note R_1 « la pièce est rejetée au premier contrôle » et R_2 « elle est rejetée au second ». Le second contrôle ne concerne que les pièces qui ont passé le premier : la probabilité 0,05 est **conditionnelle**, $P_{\bar{R}_1}(R_2) = 0,05$.



R_i : rejet au contrôle i ; la pièce acceptée suit le chemin du bas

La pièce est acceptée si elle passe les deux contrôles, c'est-à-dire sur le chemin $\bar{R}_1 \rightarrow \bar{R}_2$:

$$P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = P(\bar{R}_1) \times P_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2) = 0,92 \times 0,95 = 0,874$$

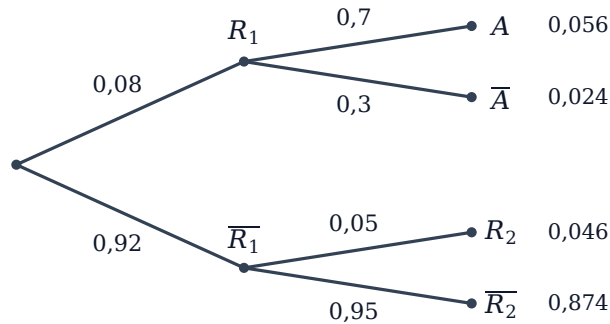
87,4 % des pièces sont acceptées.

Contrôle. Rejets : $0,08 + 0,92 \times 0,05 = 0,08 + 0,046 = 0,126$, et $0,874 + 0,126 = 1$.

Réponse. 0,874.

Correction de l'exercice 13 – Un rattrapage

On ajoute une branche à l'arbre précédent : une pièce rejetée au premier contrôle est retouchée, puis acceptée avec la probabilité 0,7 (événement A).



Rattrapage après un rejet au premier contrôle

Une pièce est finalement acceptée par **deux chemins** incompatibles :

- elle passe les deux contrôles : $0,92 \times 0,95 = 0,874$;
- elle est rejetée au premier, retouchée, puis acceptée : $0,08 \times 0,7 = 0,056$.

$$P(\text{acceptée}) = 0,874 + 0,056 = 0,93$$

Lecture. La retouche fait gagner 5,6 points d'acceptation : sur 10 000 pièces, environ 560 pièces sont récupérées au lieu d'être jetées.

Réponse. $P(\text{acceptée}) = 0,93$.

Correction de l'exercice 14 – Une partition mal posée

L'erreur. La formule des probabilités totales exige que A et B forment une **partition** : ils doivent être incompatibles et couvrir toutes les possibilités, donc vérifier $P(A) + P(B) = 1$. Or

$$P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1 \neq 1$$

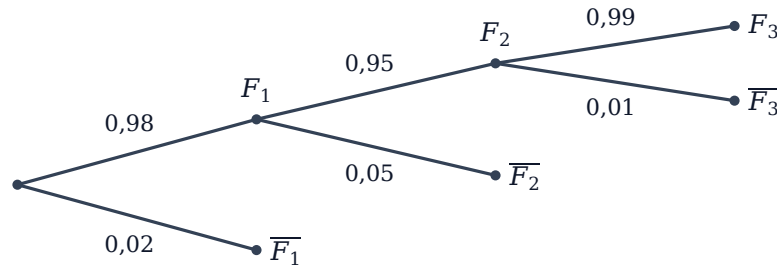
Les données sont incohérentes : soit A et B se recouvrent (une même pièce compterait dans les deux), soit l'une des valeurs est fausse.

Ce qu'il faut faire. Vérifier la partition **avant** d'appliquer la formule. Si les causes sont « fournisseur A » et « fournisseur B » et que A fournit 60 % des pièces, alors $P(B) = 0,4$, pas 0,5.

Réponse. $P(A) + P(B) = 1,1$: ce n'est pas une partition, la formule ne s'applique pas.

Correction de l'exercice 15 – Un arbre à trois niveaux

On note F_i « l'élément i fonctionne ». Le système, en série, fonctionne seulement si les trois éléments fonctionnent ; ils sont **indépendants**, donc on multiplie.



Système en série : seul le chemin du haut fonctionne

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0,98 \times 0,95 \times 0,99 = 0,92169$$

Le système tombe en panne dans le cas contraire :

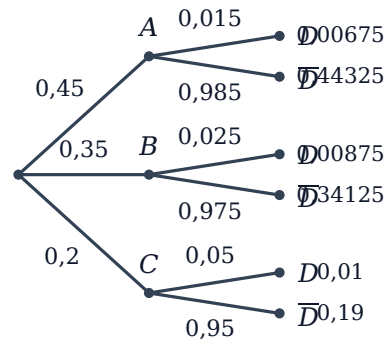
$$P(\text{panne}) = 1 - 0,92169 = 0,07831$$

Environ 7,8 % de pannes. L'élément le plus faible (0,95) pèse le plus : c'est lui qu'il faudrait fiabiliser en priorité.

Réponse. $P(\text{fonctionne}) = 0,92169$; $P(\text{panne}) = 0,07831$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un contrôle de réception

On note A, B, C les fournisseurs et D « la pièce est défectueuse ».



Trois fournisseurs puis défaut

a) **Probabilités totales :**

$$P(D) = 0,45 \times 0,015 + 0,35 \times 0,025 + 0,2 \times 0,05 = 0,00675 + 0,00875 + 0,01 = 0,0255$$

b) On remonte l'arbre ; les dénominateurs étant égaux, on compare les chemins :

$$- P_D(A) = \frac{0,00675}{0,0255} \approx 0,265 ; P_D(B) = \frac{0,00875}{0,0255} \approx 0,343 ; P_D(C) = \frac{0,01}{0,0255} \approx 0,392.$$

Le fournisseur le plus probable est **C**, alors qu'il ne livre que 20 % des pièces.

c) Nombre attendu de défauts : $40\,000 \times 0,0255 = 1\,020$, soit une perte de $1\,020 \times 14 = 14\,280$ €.

d) Si A livre $45 + 20 = 65$ % des pièces et C plus rien :

$$P(D) = 0,65 \times 0,015 + 0,35 \times 0,025 = 0,00975 + 0,00875 = 0,0185$$

Défauts attendus : $40\,000 \times 0,0185 = 740$, perte $740 \times 14 = 10\,360$ €. L'économie est de

$14\,280 - 10\,360 = 3\,920$ € par an.

Réponse. a) 0,0255 — b) C ($\approx 0,392$) — c) 14 280 € — d) taux 0,0185, économie 3 920 €.