

Plaquette 1 - Arbres pondérés, probabilités totales et diagnostic

Probabilités conditionnelles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Probabilité conditionnelle** ($P(A) \neq 0$) :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- Dans un **arbre pondéré** : on **multiplie** le long d'un chemin, on **additionne** les chemins qui réalisent l'événement. La somme des branches issues d'un nœud vaut 1.
- **Formule des probabilités totales** avec la partition $\{A; \bar{A}\}$:

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

- **Remontée de l'arbre** (diagnostic) :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Indépendance** : A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$.
- Contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Vocabulaire des tests : **vrai positif** ($M \cap T$), **faux positif** ($\bar{M} \cap T$), **sensibilité** $P_M(T)$, **spécificité** $P_{\bar{M}}(\bar{T})$.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau croisé

Chaque composant a la même probabilité d'être prélevé : une probabilité **simple** ou une **intersection** se calcule en divisant un effectif par l'effectif **total** 800.

$$P(A_1) = \frac{500}{800} = 0,625$$

- $P(D) = \frac{53}{800} = 0,06625$: environ 6,6 % des composants sont défectueux ;
- $P(A_1 \cap D) = \frac{32}{800} = 0,04$: 4 % des composants viennent de l'atelier 1 **et** sont défectueux (case intérieure du tableau).

Contrôle. $P(A_1 \cap D) \leq P(A_1)$ et $P(A_1 \cap D) \leq P(D)$.

Réponse. $P(A_1) = 0,625$, $P(D) = 0,06625$, $P(A_1 \cap D) = 0,04$.

Correction de l'exercice 2 - Probabilité conditionnelle dans un tableau

- $P_{A_1}(D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(A_1)} = \frac{32}{500} = 0,064$: 6,4 % des composants de l'atelier 1 sont défectueux.
- $P_D(A_1) = \frac{32}{53} \approx 0,604$: environ 60,4 % des composants défectueux viennent de l'atelier 1.
- Ces deux probabilités répondent à des questions **différentes** : la première décrit la qualité de l'atelier, la seconde l'origine des défauts. Les confondre est l'erreur la plus

fréquente du chapitre.

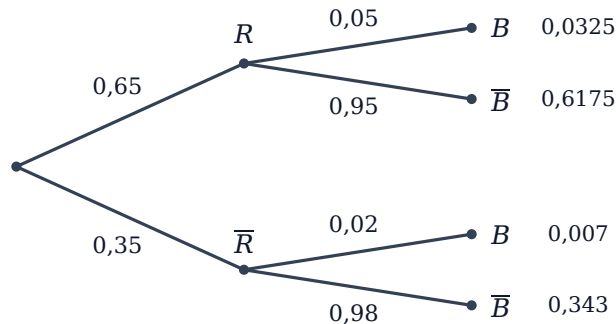
Réponse. $P_{A_1}(D) = 0,064$ et $P_D(A_1) \approx 0,604$.

Correction de l'exercice 3 - Construire un arbre

Notons R : « réglage rapide », $\bar{R}$: « réglage précis » et B : « rebut ».

— Données : $P(R) = 0,65$, $P_R(B) = 0,05$, $P(\bar{R}) = 0,35$, $P_{\bar{R}}(B) = 0,02$.

Arbre pondéré : premier niveau, le réglage ; second niveau, le rebut **sachant** le réglage.



Réglage (R : rapide) puis rebut (B)

— Probabilité d'un chemin = **produit** des probabilités rencontrées :

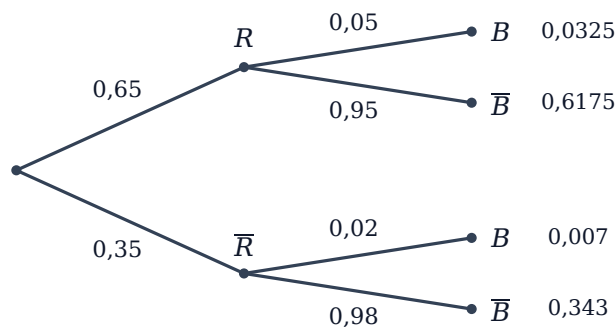
$$P(\bar{R} \cap B) = 0,35 \times 0,02 = 0,007$$

— Soit 0,7 % de la production totale.

Réponse. $P(\bar{R} \cap B) = 0,007$.

Correction de l'exercice 4 - Probabilités totales

Arbre pondéré de la situation :



Les deux chemins menant à B

Une pièce rebutée peut venir de l'un ou l'autre réglage : on **additionne** les deux chemins.

$$P(B) = P(R) \times P_R(B) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B)$$

— $P(B) = 0,65 \times 0,05 + 0,35 \times 0,02 = 0,0325 + 0,007 = 0,0395$.

— Soit 3,95 % de rebuts au total.

— Contrôle de vraisemblance : le résultat est entre 2 % et 5 %, les deux taux de départ, et plus proche de 5 % car le réglage rapide domine. Cohérent.

Réponse. $P(B) = 0,0395$.

Correction de l'exercice 5 - Remonter l'arbre

On applique la formule de remontée :

$$P_B(R) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{0,0325}{0,0395} \approx 0,823$$

- Environ 82,3 % des rebuts viennent du réglage rapide.
- Double effet : ce réglage produit davantage de pièces **et** davantage de rebuts par pièce. C'est lui qu'il faut corriger en priorité.

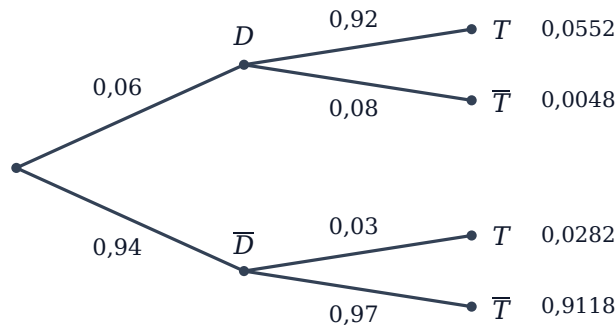
Réponse. $P_B(R) \approx 0,823$.

Correction de l'exercice 6 - Test de contrôle : sensibilité

Notons D : « défectueuse » et T : « signalée ».

- Données : $P(D) = 0,06$, $P_D(T) = 0,92$, $P(\bar{D}) = 0,94$, $P_{\bar{D}}(T) = 0,03$.

Arbre pondéré de la situation :



Pièce défectueuse ou non, puis signalement

- Probabilités totales :

$$P(T) = 0,06 \times 0,92 + 0,94 \times 0,03 = 0,0552 + 0,0282 = 0,0834$$

- Soit 8,34 % des pièces signalées.
- Remarque : c'est bien plus que les 6 % de pièces réellement défectueuses, à cause des **faux positifs**.

Réponse. $P(T) = 0,0834$.

Correction de l'exercice 7 - Valeur prédictive d'un contrôle

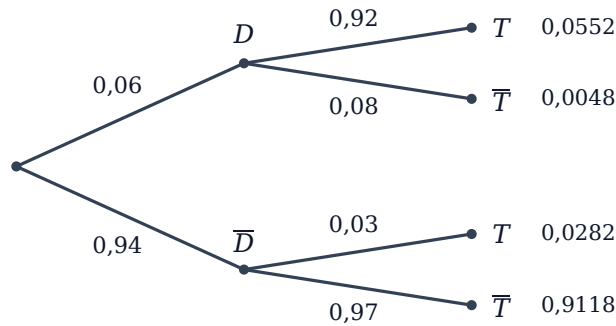
$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0552}{0,0834} \approx 0,662$$

- Environ 66,2 % des pièces signalées sont réellement défectueuses ; les 33,8 % restants sont des **faux positifs**.
- Enseignement : un contrôle « fiable à 92 % » ne signifie pas que 92 % des alertes sont justifiées. La proportion de pièces défectueuses dans la production joue un rôle décisif.

Réponse. $P_T(D) \approx 0,662$.

Correction de l'exercice 8 – Pièces signalées à tort

Les deux erreurs du contrôle sont deux chemins de l'arbre :



Faux positif : D puis T ; faux négatif : D puis T

- Faux positif : $P(\bar{D} \cap T) = 0,94 \times 0,03 = 0,0282$, soit 2,82 % de la production.
- Faux négatif : une pièce défectueuse non détectée, donc $P(D \cap \bar{T}) = 0,06 \times (1 - 0,92) = 0,06 \times 0,08 = 0,0048$, soit 0,48 %.
- Contrôle : les quatre cas doivent totaliser 1 : $0,0552 + 0,0048 + 0,0282 + 0,9118 = 1$. Cohérent.
- Lecture industrielle : les faux positifs coûtent du temps de tri, les faux négatifs laissent passer des défauts chez le client — ce sont les plus graves.

Réponse. Faux positifs : 0,0282 · faux négatifs : 0,0048.

Correction de l'exercice 9 – Tester l'indépendance

Critère du cours : A_1 et D sont indépendants si $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D)$.

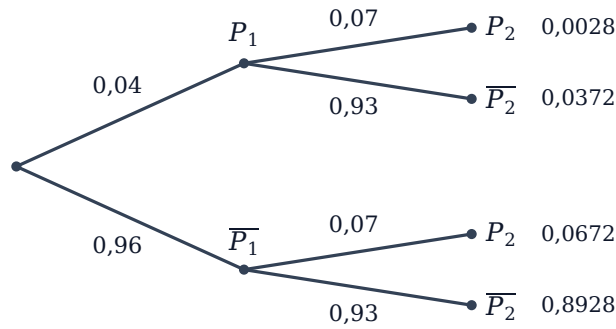
- $P(A_1 \cap D) = 0,04$.
- $P(A_1) \times P(D) = 0,625 \times 0,06625 \approx 0,0414$.
- $0,04 \neq 0,0414$: les événements **ne sont pas indépendants**, mais ils en sont proches.
- Vérification par les taux : $\frac{32}{500} = 6,4\%$ de défauts à l'atelier 1 contre $\frac{21}{300} = 7,0\%$ à l'atelier 2 : les deux ateliers ont des qualités voisines mais non identiques.

Réponse. Non : $0,04 \neq 0,0414$ (mais l'écart est faible).

Correction de l'exercice 10 – Deux éléments indépendants

L'indépendance permet de multiplier.

Arbre des deux modules (P_i : « le module i tombe en panne ») :



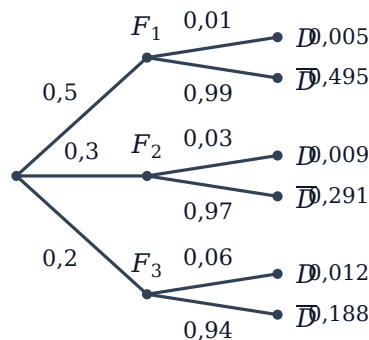
P_i : le module i tombe en panne

- a) $0,04 \times 0,07 = 0,0028$.
- b) $0,96 \times 0,93 = 0,8928$.
- c) Deux cas : le premier tombe et pas le second, ou l'inverse.
- $0,04 \times 0,93 = 0,0372$ et $0,96 \times 0,07 = 0,0672$, donc $P = 0,0372 + 0,0672 = 0,1044$.
- Contrôle : $0,0028 + 0,8928 + 0,1044 = 1$. Les trois cas couvrent bien toutes les possibilités.

Réponse. a) 0,0028 · b) 0,8928 · c) 0,1044.

Correction de l'exercice 11 - Problème : trois fournisseurs

Arbre pondéré de la situation :



Trois fournisseurs

a) Probabilités totales avec trois branches :

$$P(D) = 0,50 \times 0,01 + 0,30 \times 0,03 + 0,20 \times 0,06$$

— $P(D) = 0,005 + 0,009 + 0,012 = 0,026$, soit 2,6 %.

b) $P_D(F_3) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,026} \approx 0,462$.

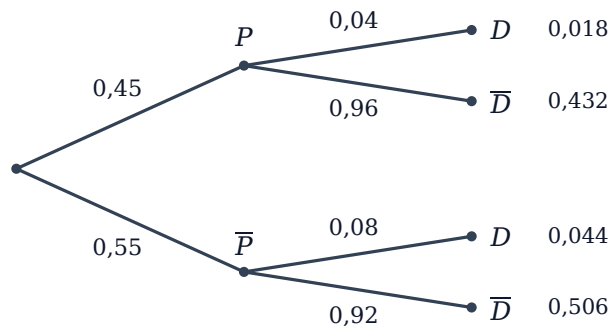
— Le fournisseur F_3 ne livre que 20 % des pièces mais provoque 46,2 % des défauts : c'est sur lui qu'il faut agir.

Réponse. a) $P(D) = 0,026$ · b) $P_D(F_3) \approx 0,462$.

Correction de l'exercice 12 - Compléter puis exploiter un arbre

a) Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 :

$$P(\bar{P}) = 1 - 0,45 = 0,55 \quad P_P(\bar{D}) = 1 - 0,04 = 0,96 \quad P_{\bar{P}}(\bar{D}) = 1 - 0,08 = 0,92$$



L'arbre complété, chemins au bout

b) **Probabilités totales**, avec les deux chemins menant à D :

$$P(D) = 0,45 \times 0,04 + 0,55 \times 0,08 = 0,018 + 0,044 = 0,062$$

c) On remonte l'arbre :

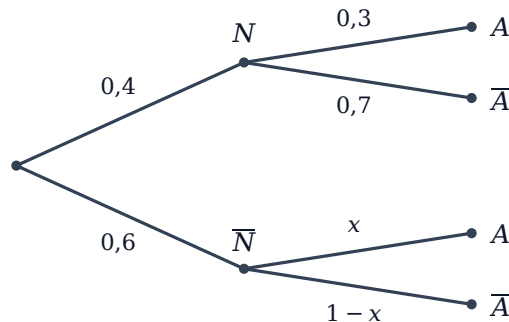
$$P_D(P) = \frac{P(P \cap D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,062} \approx 0,290$$

Le poste 1 ne fournit qu'environ 29 % des pièces défectueuses, alors qu'il produit 45 % des pièces : il est le plus fiable des deux.

Réponse. a) 0,55 ; 0,96 ; 0,92 — b) $P(D) = 0,062$ — c) $P_D(P) \approx 0,290$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver une branche inconnue

a) Premier niveau : $P(N) = 0,4$ et $P(\bar{N}) = 0,6$; second niveau : $P_N(A) = 0,3$ et l'inconnue x .

L'inconnue x sur une branche du second niveau

b) La formule des probabilités totales relie les données :

$$P(A) = P(N) \times P_N(A) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(A)$$

$$0,36 = 0,4 \times 0,3 + 0,6x = 0,12 + 0,6x$$

donc $0,6x = 0,24$ et $x = 0,4$.

Vérification. $0,12 + 0,6 \times 0,4 = 0,12 + 0,24 = 0,36$.

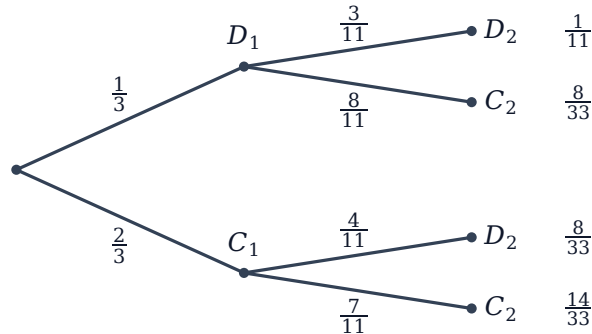
c) **Non**, au contraire : $P_N(A) = 0,3$ alors que $P_{\bar{N}}(A) = 0,4$. Dans cette entreprise, les salariés de nuit ont moins souvent eu un arrêt de travail.

Réponse. b) $x = 0,4$ — c) non : $0,3 < 0,4$.

Correction de l'exercice 14 - Prélèvements sans remise dans un lot

On note D_i « la i -ième carte est défectueuse » et C_i « elle est conforme ».

a) Au premier prélèvement : $P(D_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Au second, il ne reste que 11 cartes, et leur composition dépend du premier prélèvement.



Deux prélèvements sans remise dans un lot de 12 pièces

b) Chemin $D_1 \rightarrow D_2$:

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{12}{132} = \frac{1}{11}$$

c) Deux chemins : $D_1 \rightarrow C_2$ et $C_1 \rightarrow D_2$.

$$P = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{64}{132} = \frac{16}{33}$$

d) « Au moins une défectueuse » est le contraire de « deux conformes » :

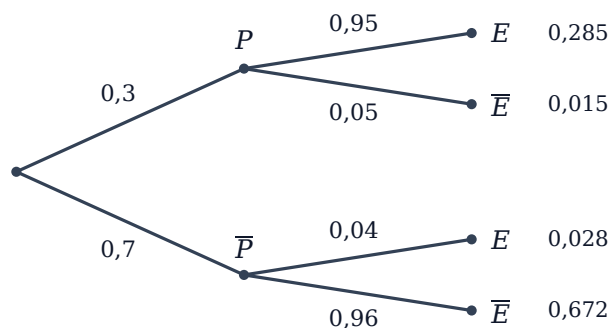
$$P = 1 - \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = 1 - \frac{56}{132} = \frac{76}{132} = \frac{19}{33} \approx 0,576$$

Contrôle. $\frac{1}{11} + \frac{16}{33} = \frac{3}{33} + \frac{16}{33} = \frac{19}{33}$: même résultat.

Réponse. b) $\frac{1}{11}$ — c) $\frac{16}{33}$ — d) $\frac{19}{33} \approx 0,576$.

Correction de l'exercice 15 - Éclairage à détection de présence

On note P « une personne est présente » et E « l'éclairage est allumé ».



Présence (P) puis allumage de l'éclairage (E)

a) **Probabilités totales :**

$$P(E) = 0,3 \times 0,95 + 0,7 \times 0,04 = 0,285 + 0,028 = 0,313$$

b) On remonte l'arbre :

$$P_E(P) = \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = \frac{0,285}{0,313} \approx 0,911$$

Quand l'éclairage est allumé, quelqu'un est présent dans environ 91 % des cas.

c) L'éclairage est allumé inutilement sur le chemin $\bar{P} \rightarrow E$, de probabilité 0,028 : sur 1000 heures, cela représente environ $1000 \times 0,028 = 28$ heures.

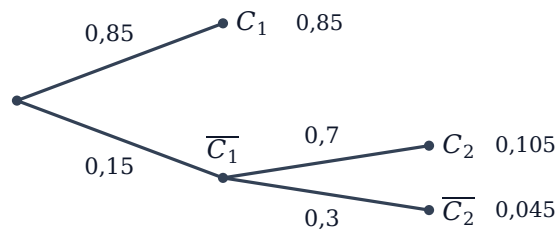
Lecture énergétique. Ces 28 heures sont le coût des fausses détections ; à l'inverse, le chemin $P \rightarrow \bar{E}$ ($0,3 \times 0,05 = 0,015$) correspond à 15 heures où une personne est dans le noir.

Réponse. a) 0,313 — b) $\approx 0,911$ — c) environ 28 heures.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : contrôle en deux étapes

a) Non-détection au premier : $1 - 0,85 = 0,15$; au second : $1 - 0,70 = 0,30$.

Sur l'arbre (C_i : « le contrôle i détecte la pièce »), la non-détection est le chemin $\bar{C}_1 \rightarrow \bar{C}_2$:



Le second contrôle ne voit que les pièces passées au premier

— Les contrôles étant indépendants : $P(\text{non détectée}) = 0,15 \times 0,30 = 0,045$.

b) Événement contraire : $1 - 0,045 = 0,955$, soit 95,5 % de détection.

c) Avec n contrôles identiques au premier, le risque de non-détection est $0,15^n$. On cherche $0,15^n < 0,001$.

— $0,15^3 = 0,003\,375$ (encore trop) et $0,15^4 \approx 0,000\,506$ (suffisant).

— Il faut donc 4 **contrôles**.

— Lecture industrielle : chaque contrôle supplémentaire divise le risque par environ 6,7, mais coûte du temps : on arbitre entre fiabilité et cadence.

Réponse. a) 0,045 · b) 0,955 · c) 4 contrôles ($0,15^4 \approx 0,000\,5$).