

Plaquette 4 - Indépendance et fiabilité : montages en série et en parallèle

Probabilités conditionnelles – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Indépendance et fiabilité.

- **Définition.** A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ce qui équivaut, si $P(A) \neq 0$, à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change rien à la probabilité de B .

- Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- **Montage en série** de n composants indépendants de fiabilités $p_1, \dots, p_n$: le système fonctionne si **tous** fonctionnent.

$$P(\text{système}) = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

- **Montage en parallèle** (redondance) : le système tombe en panne si **tous** tombent en panne. Avec des probabilités de panne $q_1, \dots, q_n$:

$$P(\text{système}) = 1 - q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n$$

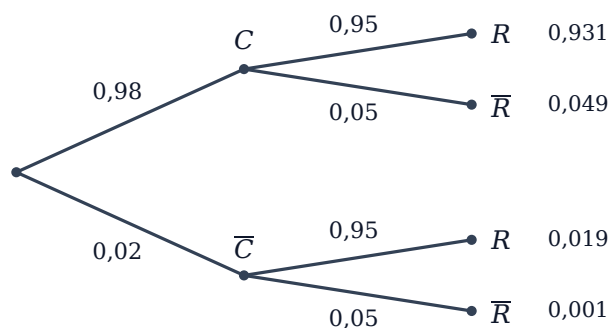
- « **Au moins un** » : passer au contraire.

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$$

- n épreuves **identiques et indépendantes** de probabilité p : la probabilité que l'événement se produise n fois de suite vaut p^n .
- **Tirages** : *avec remise*, les tirages sont indépendants ; *sans remise*, ils ne le sont pas et on repasse par des probabilités conditionnelles.
- Contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Correction de l'exercice 1 - Deux composants en série

Arbre des deux éléments (indépendants : mêmes branches au second niveau) :



C : le capteur fonctionne, R : le relais fonctionne

Notons C : « le capteur fonctionne » et R : « le relais fonctionne ». Le circuit fonctionne si C et R sont réalisés.

Les deux composants étant indépendants, on applique la formule du cours :

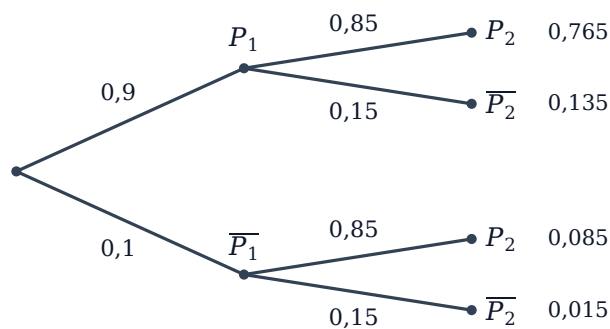
$$P(C \cap R) = P(C) \times P(R)$$

- $P(C \cap R) = 0,98 \times 0,95 = 0,931$.
- Panne du circuit : événement contraire, $1 - 0,931 = 0,069$.
- Le circuit fonctionne dans 93,1 % des cas.
- **À retenir** : en série, la fiabilité du système est **inférieure** à celle du plus faible des composants ($0,931 < 0,95$). Ajouter un élément en série ne peut que dégrader la fiabilité.

Réponse. 0,931 de fonctionnement, 0,069 de panne.

Correction de l'exercice 2 - Deux pompes en parallèle

Arbre des deux éléments (indépendants : mêmes branches au second niveau) :



P_i : la pompe i fonctionne

Le refroidissement n'est **pas** assuré seulement si les **deux** pompes tombent en panne. On calcule d'abord ce cas.

- $P(\text{les deux en panne}) = 0,10 \times 0,15 = 0,015$ (indépendance).
- On passe au contraire :

$$P(\text{refroidissement assuré}) = 1 - 0,015 = 0,985$$

- Le refroidissement est assuré dans 98,5 % des cas.
- **À retenir** : en parallèle, la fiabilité du système est **supérieure** à celle de chaque pompe prise seule ($0,985 > 0,90$). C'est tout l'intérêt de la redondance.

Réponse. 0,985.

Correction de l'exercice 3 - Au moins un capteur en panne

« Au moins un » se calcule toujours par l'événement contraire : « aucun capteur ne tombe en panne ».

- Un capteur ne tombe pas en panne avec la probabilité $1 - 0,05 = 0,95$.
- Les 4 capteurs étant indépendants, on multiplie :

$$P(\text{aucune panne}) = 0,95^4 \approx 0,814\,506$$

- Puis :

$$P(\text{au moins une panne}) = 1 - 0,95^4 \approx 0,185$$

- Environ 18,5 % de risque qu'au moins un capteur lâche dans l'année.
- **Piège** : ce n'est pas $4 \times 0,05 = 0,20$. Cette addition compterait plusieurs fois les cas où deux capteurs tombent en panne ; elle donne d'ailleurs un résultat trop grand.

Réponse. $1 - 0,95^4 \approx 0,185$.

Correction de l'exercice 4 - Trois relais identiques

a) Les trois doivent fonctionner : on multiplie trois fois la même probabilité.

$$P = 0,97^3 \approx 0,912\,673$$

— Soit environ 0,913.

b) « Au moins un fonctionne » a pour contraire « les trois sont en panne ».

— Un relais est en panne avec la probabilité $1 - 0,97 = 0,03$.

— $P(\text{les trois en panne}) = 0,03^3 = 0,000\,027$.

— Donc $P(\text{au moins un}) = 1 - 0,000\,027 = 0,999\,973$.

— Les deux questions décrivent deux montages différents : a) correspond au montage **en série**, b) au montage **en parallèle**. Mêmes composants, fiabilités très différentes.

Réponse. a) $\approx 0,913$ · b) 0,999 973.

Correction de l'exercice 5 - Vérifier une indépendance

On applique le critère du cours : J et N sont indépendants si $P(J \cap N) = P(J) \times P(N)$.

— $P(J) = \frac{300}{400} = 0,75$.

— $P(N) = \frac{16}{400} = 0,04$.

— $P(J \cap N) = \frac{12}{400} = 0,03$.

— Produit : $P(J) \times P(N) = 0,75 \times 0,04 = 0,03$.

— Les deux valeurs sont **égales** : les événements sont **indépendants**.

Deuxième lecture, plus parlante :

— $P_J(N) = \frac{12}{300} = 0,04$ et $P_N(J) = \frac{12}{16} = 0,75$.

— On retrouve $P_J(N) = P(N)$: les deux équipes ont exactement le même taux de non-conformité (4 %). Connaître l'équipe n'apprend rien sur la conformité.

Réponse. Oui : $P(J \cap N) = 0,03 = P(J) \times P(N)$.

Correction de l'exercice 6 - Compléter un tableau d'indépendance

Notons A : « l'article vient du site A » et D : « l'article est défectueux ».

— $P(A) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$ et $P(D) = \frac{30}{600} = 0,05$.

— L'indépendance donne :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P(D) = \frac{1}{3} \times 0,05 = \frac{1}{60}$$

— L'effectif correspondant vaut $600 \times \frac{1}{60} = 10$ articles.

— On complète alors par différences : $200 - 10 = 190$ conformes sur le site A, $30 - 10 = 20$ défectueux sur le site B, et $400 - 20 = 380$ conformes sur le site B.

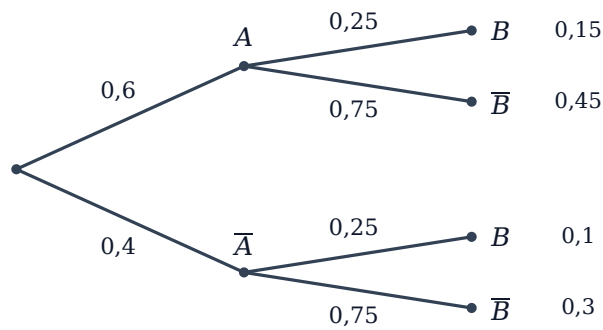
Effectifs	Conformes	Défectueux	Total
Site A	190	10	200
Site B	380	20	400
Total	570	30	600

- Contrôle : $\frac{10}{200} = 0,05$ et $\frac{20}{400} = 0,05$. Les deux sites ont bien le même taux de défauts, ce qui est la traduction concrète de l'indépendance.

Réponse. Site A : 190 conformes et 10 défectueux ; site B : 380 conformes et 20 défectueux.

Correction de l'exercice 7 - Indépendance et événements contraires

Arbre pondéré : par indépendance, la branche B vaut 0,25 sous A comme sous $\bar{A}$; les feuilles donnent directement les intersections.



A et B indépendants

a) Indépendance : on multiplie.

$$P(A \cap B) = 0,6 \times 0,25 = 0,15$$

b) Formule de la réunion :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $P(A \cup B) = 0,6 + 0,25 - 0,15 = 0,70$.

c) Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

- $P(A \cap \bar{B}) = 0,6 \times (1 - 0,25) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,75 = 0,30$.

- Contrôle : les quatre cas couvrent tout. $0,15 + 0,45 + 0,10 + 0,30 = 1$, avec $P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,10$. Cohérent.

- **Piège** : ne pas confondre **indépendants** et **incompatibles**. Ici $P(A \cap B) = 0,15 \neq 0$: les deux événements peuvent parfaitement se produire ensemble.

Réponse. a) 0,15 · b) 0,70 · c) 0,45 et 0,30.

Correction de l'exercice 8 - Une chaîne de maillons

Les maillons sont **en série** : la chaîne tient si tous les maillons tiennent.

a) $P = 0,99^4 \approx 0,9606$.

b) $P = 0,99^{10} \approx 0,9044$.

c) Chaque maillon supplémentaire fait perdre environ 1 % de fiabilité.

- Avec 4 maillons on tombe déjà sous 96 %, avec 10 sous 91 %, alors que chaque maillon pris seul est fiable à 99 %.

- **Lecture industrielle** : c'est la règle du maillon faible. Dans un montage en série, multiplier les composants dégrade la fiabilité globale même si chacun est excellent — d'où l'intérêt de simplifier les chaînes critiques.

Réponse. a) $\approx 0,9606$ · b) $\approx 0,9044$ · c) la fiabilité chute quand le nombre d'éléments en

série augmente.

Correction de l'exercice 9 - L'effet de la redondance

Un module tombe en panne avec la probabilité $q = 1 - 0,90 = 0,10$.

En parallèle, le système est en panne seulement si **tous** les modules le sont :

$$P(\text{système}) = 1 - q^n$$

- $n = 1 : 1 - 0,10 = 0,90$.
- $n = 2 : 1 - 0,10^2 = 1 - 0,01 = 0,99$.
- $n = 3 : 1 - 0,10^3 = 1 - 0,001 = 0,999$.
- Chaque module ajouté divise le risque de panne par 10 : 10 %, puis 1 %, puis 0,1 %.
- **Lecture industrielle** : c'est le principe de la redondance en aéronautique ou en informatique (serveurs miroirs). L'effet est spectaculaire au début, puis le gain devient marginal alors que le coût, lui, reste proportionnel au nombre de modules.

Réponse. $0,90 \cdot 0,99 \cdot 0,999$.

Correction de l'exercice 10 - Un montage mixte

On traite le montage par **blocs**, en commençant par le bloc parallèle.

Bloc des pompes (parallèle). Il est hors service si les deux pompes tombent en panne.

- $P(\text{les deux pompes en panne}) = 0,08 \times 0,08 = 0,0064$.
- Donc $P(\text{bloc pompes}) = 1 - 0,0064 = 0,9936$.

Ensemble (série). L'installation fonctionne si le bloc des pompes **et** la vanne fonctionnent.

- $P(\text{vanne}) = 1 - 0,03 = 0,97$.

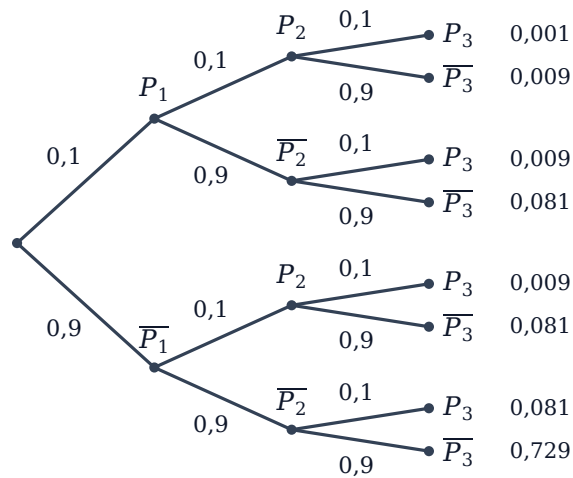
$$P(\text{installation}) = 0,9936 \times 0,97 = 0,963792$$

- Soit environ 0,9638.
- **Remarque de conception** : la vanne, non redondée, plafonne la fiabilité à 0,97. Doubler encore les pompes ne servirait presque à rien ; c'est la vanne qu'il faudrait doubler.

Réponse. $\approx 0,9638$.

Correction de l'exercice 11 – Exactement un capteur en panne

Arbre des trois capteurs (P_i : « le capteur i tombe en panne »). Exactement une panne correspond aux trois chemins comportant une seule branche P_i :



P_i : le capteur i tombe en panne

Notons les capteurs 1, 2, 3 ; chacun est en panne avec la probabilité 0,10 et fonctionne avec la probabilité 0,90.

a) Aucun en panne : $0,90^3 = 0,729$.

b) « Exactement un en panne » se décompose en **trois** cas incompatibles : c'est le capteur 1, ou le 2, ou le 3.

— Chaque cas a la même probabilité : $0,10 \times 0,90 \times 0,90 = 0,081$.

— Il y en a 3, donc $P = 3 \times 0,081 = 0,243$.

c) Les deux cas restants :

— exactement deux en panne : $3 \times 0,10 \times 0,10 \times 0,90 = 3 \times 0,009 = 0,027$;

— les trois en panne : $0,10^3 = 0,001$.

— Somme : $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$. Cohérent.

— **Méthode** : ne jamais oublier le **nombre de dispositions** possibles. Écrire 0,081 seul reviendrait à ne compter qu'un seul des trois scénarios.

Réponse. a) 0,729 · b) 0,243 · c) $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

Correction de l'exercice 12 – Combien de sauvegardes ?

Les supports sont indépendants : tout perdre signifie que **chacun** est illisible.

$$P(\text{tout perdre}) = 0,02^n$$

On cherche le plus petit entier n tel que $0,02^n < 10^{-6}$. On tabule :

n	$0,02^n$	Conclusion
2	0,000 4	trop grand
3	0,000 008	trop grand
4	0,000 000 16	convient

— $0,02^3 = 8 \times 10^{-6}$, encore au-dessus du seuil ; $0,02^4 = 1,6 \times 10^{-7}$, en dessous.

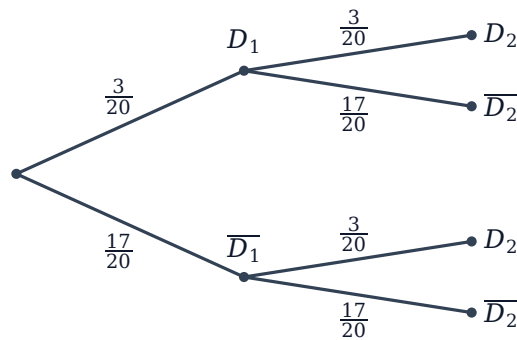
— Il faut donc **4 supports**.

— Lecture concrète : avec 4 copies, le risque de tout perdre est de l'ordre de 1 sur 6 millions.

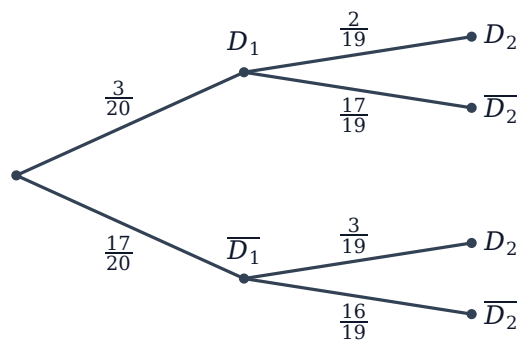
Réponse. 4 supports ($0,02^4 = 1,6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$).

Correction de l'exercice 13 - Avec remise ou sans remise ?

Les deux arbres. Avec remise, les branches du second tirage ne dépendent pas du premier ; sans remise, elles en dépendent.



Avec remise



Sans remise

a) **Avec remise**, la composition du lot est la même aux deux tirages : les tirages sont indépendants.

$$P = \frac{3}{20} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{400} = 0,0225$$

b) **Sans remise**, le deuxième tirage se fait dans un lot modifié : il reste 19 pièces dont 2 défectueuses. On utilise une probabilité conditionnelle.

$$P = \frac{3}{20} \times \frac{2}{19} = \frac{6}{380} = \frac{3}{190} \approx 0,015789$$

— Soit environ 0,016.

c) Seul le tirage **avec remise** rend les deux prélèvements indépendants.

— Sans remise, le premier tirage change la composition du lot, donc la probabilité du second : $P_{D_1}(D_2) = \frac{2}{19} \approx 0,105$ alors que $P(D_2) = \frac{3}{20} = 0,15$. Ces deux nombres diffèrent, donc il n'y a pas indépendance.

— **À retenir** : sur de très grands lots, la différence devient négligeable et on assimile souvent le tirage sans remise à un tirage avec remise. Ici, avec seulement 20 pièces, l'écart est de 30 % : l'approximation ne tient pas.

Réponse. a) 0,0225 · b) $\approx 0,016$ · c) seulement avec remise.

Correction de l'exercice 14 - Trois postes de fabrication

a) « Aucun défaut » signifie : aucun défaut au poste 1, **ni** au poste 2, **ni** au poste 3. Les postes étant indépendants, on multiplie les probabilités de non-défaut.

$$P(\text{aucun défaut}) = 0,98 \times 0,97 \times 0,99 = 0,941\,094$$

— Soit environ 0,941 1.

b) Événement contraire :

— $P(\text{au moins un défaut}) = 1 - 0,941\,094 = 0,058\,906$, soit environ 5,9 %.

c) On applique la proportion à la production.

— $5\,000 \times 0,058\,906 \approx 294,5$, soit environ 295 **pièces** défectueuses.

— **Piège** : additionner les taux donnerait $2 + 3 + 1 = 6\%$, très proche mais **faux** : cette addition compte deux fois les pièces qui cumulent deux défauts. L'écart reste petit ici parce que les taux sont faibles ; il grandirait vite avec des taux de 20 %.

Réponse. a) $\approx 0,941\,1$ · b) $\approx 0,058\,9$ · c) environ 295 pièces.

Correction de l'exercice 15 - Survie cycle après cycle

a) Les cycles sont indépendants et de même probabilité : on multiplie 100 fois 0,995.

$$P(100 \text{ cycles}) = 0,995^{100} \approx 0,605\,770$$

— Soit environ 0,606 : à peine 6 chances sur 10 d'atteindre 100 cycles.

b) $P(200 \text{ cycles}) = 0,995^{200} \approx 0,366\,958$, soit environ 0,367.

c) On utilise la règle des puissances :

$$0,995^{200} = (0,995^{100})^2$$

— $0,605\,77^2 \approx 0,366\,96$: on retrouve bien le résultat de b).

— **Interprétation** : résister à 200 cycles, c'est résister aux 100 premiers **puis** aux 100 suivants, avec la même probabilité à chaque fois puisque les cycles sont indépendants. La fiabilité se dégrade donc de façon multiplicative, pas linéaire.

Réponse. a) $\approx 0,606$ · b) $\approx 0,367$ · c) $0,995^{200} = (0,995^{100})^2$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une redondance

a) Les trois automates sont en série : on multiplie les trois fiabilités.

$$P_a = 0,92^3 = 0,778\,688$$

— Soit environ 0,779 : près d'une journée sur cinq subit un incident.

b) On raisonne **poste par poste**, puis on met les postes en série.

— Un automate tombe en panne avec la probabilité $1 - 0,92 = 0,08$.

— Un poste doublé (parallèle) est hors service si les **deux** automates tombent en panne : $0,08 \times 0,08 = 0,006\,4$.

— Fiabilité d'un poste doublé : $1 - 0,006\,4 = 0,993\,6$.

— Les trois postes doublés sont en série :

$$P_b = 0,993\,6^3 \approx 0,980\,923$$

— Soit environ 0,981.

c) Deux postes doublés (0,993 6 chacun) et un poste simple (0,92), toujours en série.

- $P_c = 0,9936 \times 0,9936 \times 0,92 \approx 0,908262$, soit environ 0,908.
 - Le poste non doublé plafonne la ligne : on gagne beaucoup par rapport à a) (0,779), mais on reste loin de b) (0,981).
- d) On compare les nombres de journées avec incident sur 220 jours.
- Configuration a) : $220 \times (1 - 0,778688) \approx 220 \times 0,221312 \approx 48,7$ journées.
 - Configuration b) : $220 \times (1 - 0,980923) \approx 220 \times 0,019077 \approx 4,2$ journées.
 - On évite donc environ $48,7 - 4,2 \approx 44,5$, soit à peu près 45 **journées d'arrêt** par an.
 - **Lecture industrielle** : doubler les trois postes coûte trois automates supplémentaires et récupère 45 journées de production. C'est ce chiffre — et non la probabilité seule — qui permet de trancher face au coût du matériel.
- Réponse.** a) $\approx 0,779$ · b) $\approx 0,981$ · c) $\approx 0,908$ · d) environ 45 journées d'arrêt évitées.