

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse :
traduire, modéliser et décider
Probabilités conditionnelles – Terminale STI2D
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes de synthèse.

- **Probabilité conditionnelle** ($P(A) \neq 0$) :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- **Probabilités totales** avec une partition $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

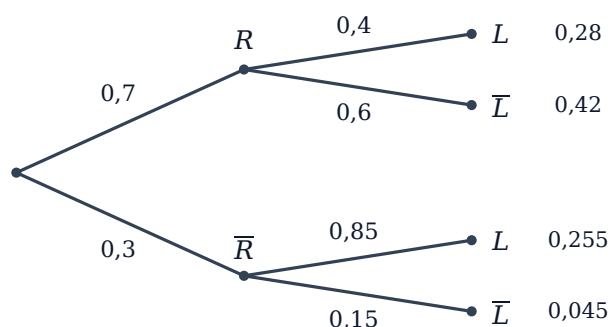
- **Remontée** (probabilité des causes) :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Traduire un énoncé.** Les mots « parmi », « sachant que », « chez les », « pour les » annoncent une probabilité **conditionnelle** ; le mot « et » annonce une **intersection** ; un pourcentage de la population totale est une probabilité **simple**.
- **Retrouver une donnée manquante** : on écrit la formule des probabilités totales avec l'inconnue x , puis on résout l'équation du premier degré obtenue.
- **De la probabilité au concret** : un effectif prévisible s'obtient par $N \times P$, un coût moyen par coût unitaire $\times N \times P$.
- **Indépendance** : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$.
- Contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Correction de l'exercice 1 – Traduire un énoncé en probabilités

Arbre pondéré de la situation :



Professionnel (R) ou particulier, puis commande en ligne

On repère la nature de chaque pourcentage.

- « 70 % des clients sont des professionnels » porte sur **tous** les clients : c'est une probabilité simple, $P(R) = 0,70$.
- « **Parmi les professionnels**, 40 % commandent en ligne » restreint la population aux professionnels : c'est une conditionnelle, $P_R(L) = 0,40$.

— « **Parmi les particuliers**, 85 % » donne de même $P_{\bar{R}}(L) = 0,85$.

On applique ensuite la formule du cours :

$$P(R \cap L) = P(R) \times P_R(L)$$

— $P(R \cap L) = 0,70 \times 0,40 = 0,28$.

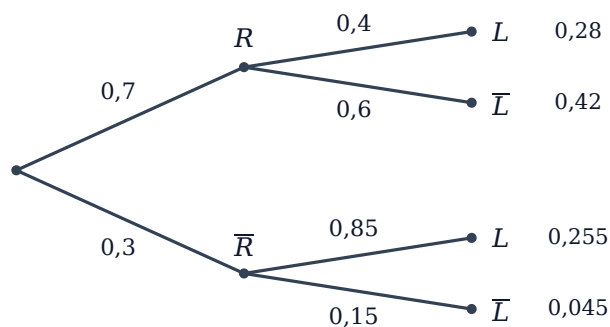
— Autrement dit, 28 % de **l'ensemble** des clients sont des professionnels commandant en ligne.

— **Piège** : 0,40 n'est **pas** la proportion de commandes en ligne dans toute la clientèle, mais seulement chez les professionnels.

Réponse. $P(R) = 0,70$, $P_R(L) = 0,40$, $P_{\bar{R}}(L) = 0,85$ et $P(R \cap L) = 0,28$.

Correction de l'exercice 2 - Le taux global

Arbre pondéré de la situation :



Deux chemins mènent à L

Un client commande en ligne qu'il soit professionnel ou particulier : les deux cas forment une partition, on applique la formule des probabilités totales.

$$P(L) = P(R) \times P_R(L) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(L)$$

— $P(\bar{R}) = 1 - 0,70 = 0,30$.

— $P(L) = 0,70 \times 0,40 + 0,30 \times 0,85 = 0,28 + 0,255 = 0,535$.

— Soit 53,5 % des clients.

— Contrôle de vraisemblance : le résultat est compris entre 40 % et 85 %, les deux taux de départ, et plus proche de 40 % car les professionnels sont majoritaires. Cohérent.

Réponse. $P(L) = 0,535$.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver une conditionnelle

On applique deux fois la définition, en changeant la population de référence.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,30$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,25} = 0,48$$

Indépendance : on compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

— $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,25 = 0,10$.

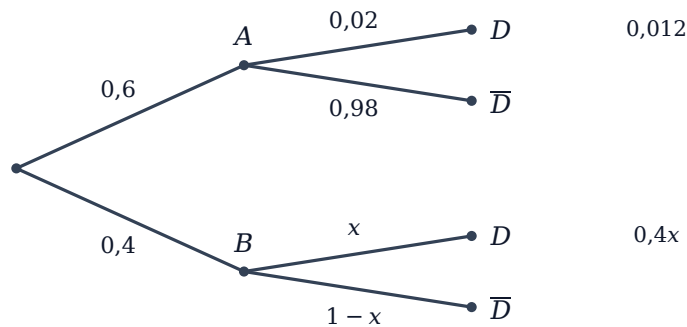
— $0,12 \neq 0,10$: les événements **ne sont pas indépendants**.

— Autre lecture : $P_A(B) = 0,30$ alors que $P(B) = 0,25$. Savoir que A est réalisé **augmente** la probabilité de B .

Réponse. $P_A(B) = 0,30$, $P_B(A) = 0,48$; non indépendants.

Correction de l'exercice 4 - Un taux manquant

Arbre pondéré, avec l'inconnue $x = P_B(D)$:



x : taux de défauts du fournisseur B

Notons x le taux de défauts de B, c'est-à-dire $P_B(D) = x$.

On écrit la formule des probabilités totales avec cette inconnue :

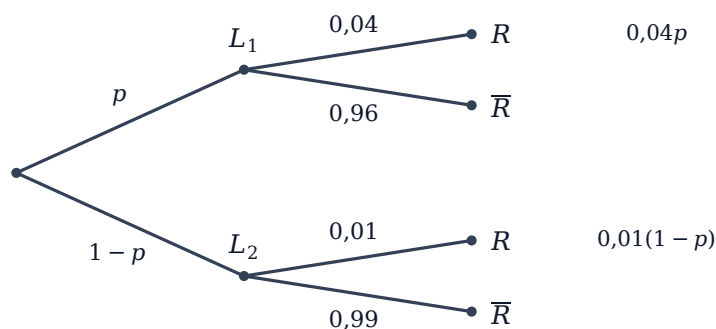
$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$

- $0,032 = 0,60 \times 0,02 + 0,40 \times x$.
- $0,032 = 0,012 + 0,40x$.
- $0,40x = 0,032 - 0,012 = 0,020$.
- $x = \frac{0,020}{0,40} = 0,05$.
- Le fournisseur B livre donc 5 % de pièces défectueuses.
- Vérification : $0,60 \times 0,02 + 0,40 \times 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032$. Le taux global est bien retrouvé.

Réponse. 5 %.

Correction de l'exercice 5 - Une proportion inconnue

Arbre pondéré, avec l'inconnue $p = P(L_1)$ au premier niveau :



p : part de la ligne 1

Ici l'inconnue n'est plus un taux de défaut mais une **part de production**. Notons p la proportion issue de la ligne 1 ; la ligne 2 en fournit donc $1 - p$.

$$0,025 = 0,04 \times p + 0,01 \times (1 - p)$$

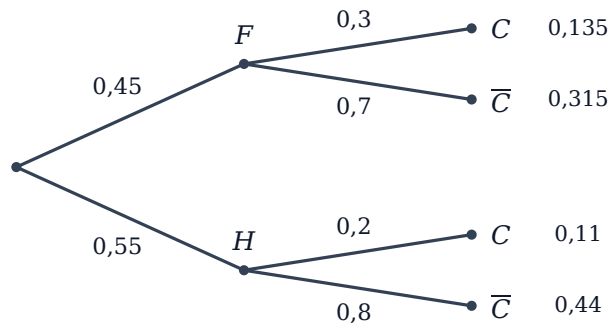
- On développe : $0,025 = 0,04p + 0,01 - 0,01p$.

- $0,025 = 0,03p + 0,01$.
- $0,03p = 0,015$, donc $p = \frac{0,015}{0,03} = 0,5$.
- La ligne 1 fournit 50 % de la production.
- Contrôle : avec une répartition à parts égales, le taux global est la moyenne de 4 % et 1 %, soit 2,5 %. Cohérent.

Réponse. 50 % de la production.

Correction de l'exercice 6 – Deux populations, un même métier

Arbre pondéré de la situation :



Femme (F) ou homme, puis cadre (C)

Notons F : « le salarié est une femme » et C : « le salarié est cadre ».

a) Probabilités totales :

$$P(C) = P(F) \times P_F(C) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(C)$$

- $P(C) = 0,45 \times 0,30 + 0,55 \times 0,20 = 0,135 + 0,110 = 0,245$.
- Soit 24,5 % de cadres.

b) On renverse le conditionnement :

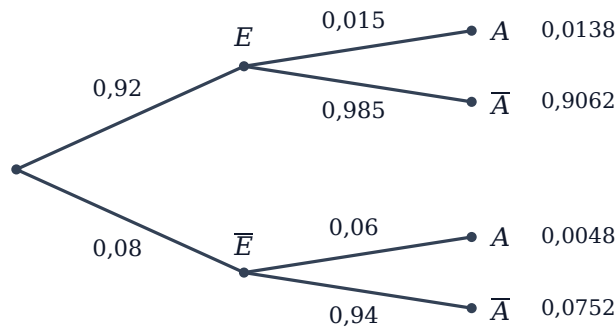
$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,135}{0,245} \approx 0,551$$

- Environ 55,1 % des cadres sont des femmes.
- **Lecture** : les femmes sont minoritaires dans l'entreprise (45 %) mais majoritaires parmi les cadres, parce que leur taux d'encadrement est plus élevé. Les deux pourcentages 30 % et 55,1 % ne disent pas la même chose et ne se déduisent pas l'un de l'autre sans le calcul.

Réponse. a) 0,245 · b) $\approx 0,551$.

Correction de l'exercice 7 – Une statistique mal interprétée

Arbre pondéré de la situation :



Expérimenté (E) ou débutant, puis accident (A)

Notons E : « conducteur expérimenté » et A : « a un accident dans l'année ».

a) $P(E) = 0,92$, $P_E(A) = 0,015$, $P_{\bar{E}}(A) = 0,06$.

$$P(A) = 0,92 \times 0,015 + 0,08 \times 0,06 = 0,0138 + 0,0048 = 0,0186$$

— Soit 1,86 % des conducteurs.

b) $P_A(E) = \frac{0,0138}{0,0186} \approx 0,742$.

— Environ 74,2 % des accidents impliquent un conducteur expérimenté.

c) **Non**, et c'est tout l'intérêt de l'exercice.

— Le chiffre de 74,2 % est $P_A(E)$: il décrit la composition des accidents, pas le risque.

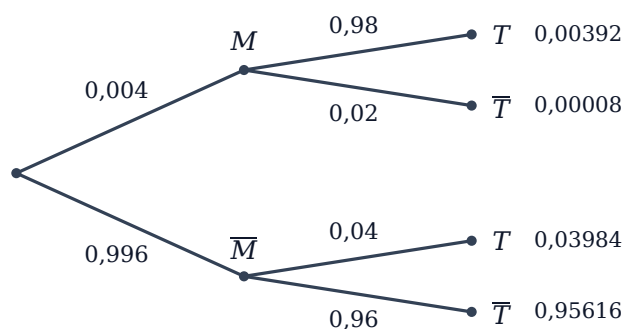
— Le risque, c'est $P_E(A) = 1,5$ % contre $P_{\bar{E}}(A) = 6$ % : un débutant a **quatre fois** plus d'accidents qu'un expérimenté.

— Si les expérimentés dominent les statistiques d'accidents, c'est simplement qu'ils sont 92 % à conduire. Confondre $P_A(E)$ et $P_E(A)$ est l'erreur classique du chapitre.

Réponse. a) $0,0186$ · b) $\approx 0,742$ · c) non : le risque est $P_E(A) = 1,5$ %, quatre fois plus faible que chez les débutants.

Correction de l'exercice 8 – Un dépistage rare

Arbre pondéré de la situation :



Malade (M) ou non, puis test positif (T)

Notons M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

— $P(M) = 0,004$, $P_M(T) = 0,98$ (sensibilité), $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,96$ donc $P_{\bar{M}}(T) = 1 - 0,96 = 0,04$.

Étape 1 — probabilité d'un test positif.

$$P(T) = 0,004 \times 0,98 + 0,996 \times 0,04 = 0,003\,92 + 0,039\,84 = 0,043\,76$$

Étape 2 — remontée.

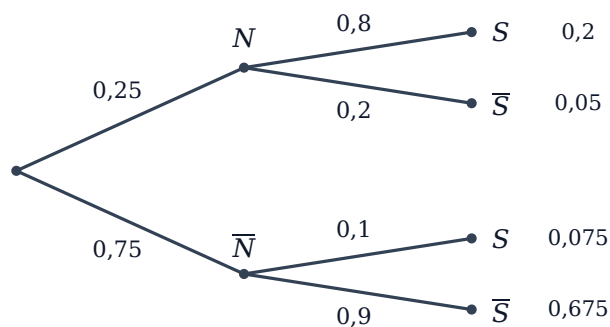
$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,003\,92}{0,043\,76} \approx 0,090$$

- Moins de 9 % des tests positifs correspondent à un malade.
- **Explication** : les personnes saines sont 249 fois plus nombreuses que les malades ; même avec seulement 4 % d'erreur, elles produisent dix fois plus de tests positifs que les vrais malades (0,039 84 contre 0,003 92).
- C'est pourquoi un dépistage de masse d'une maladie rare est toujours suivi d'un second examen de confirmation.

Réponse. $P_T(M) \approx 0,090$, soit environ 9 %.

Correction de l'exercice 9 - Un capteur météo

Arbre pondéré de la situation :



Journée nuageuse (N) ou non, puis alerte (S)

Notons N : « journée nuageuse » et S : « alerte déclenchée ».

a) Probabilités totales :

$$P(S) = 0,25 \times 0,80 + 0,75 \times 0,10 = 0,200 + 0,075 = 0,275$$

— Soit 27,5 % des journées.

b) Remontée :

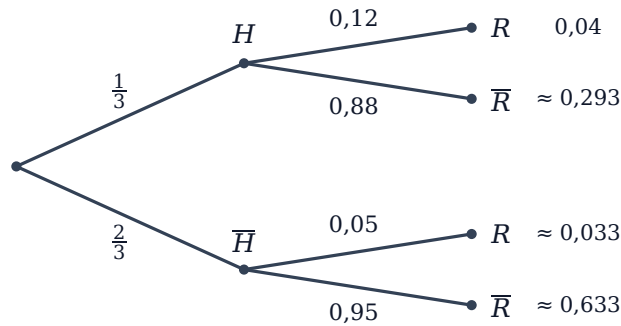
$$P_S(N) = \frac{0,200}{0,275} \approx 0,727$$

- Environ 72,7 % des alertes correspondent effectivement à une journée nuageuse ; les 27,3 % restants sont des fausses alertes.
- **Lecture technique** : pour réduire ces fausses alertes, c'est le taux de 10 % sur les journées claires qu'il faut faire baisser, plus que le taux de détection de 80 % — parce que les journées claires sont trois fois plus nombreuses.

Réponse. a) $P(S) = 0,275$ · b) $P_S(N) \approx 0,727$.

Correction de l'exercice 10 – Retards saisonniers

Arbre pondéré de la situation :



Hiver (H) : 4 mois sur 12 ; R : jour en retard

Notons H : « le jour appartient à l'hiver » et R : « le jour est en retard ».

— L'hiver compte 4 mois sur 12, donc $P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(\bar{H}) = \frac{2}{3}$.

a) Probabilités totales :

$$P(R) = \frac{1}{3} \times 0,12 + \frac{2}{3} \times 0,05 = 0,04 + 0,03333 \approx 0,073$$

— Environ 7,3 % des jours.

b) Remontée :

$$P_R(H) = \frac{0,04}{0,07333} \approx 0,545$$

— Environ 54,5 % des retards se produisent en hiver, alors que l'hiver ne représente que 33,3 % de l'année.

— **Interprétation** : la saison concentre plus de la moitié des incidents. Un plan de maintenance préventive gagnerait à cibler ces quatre mois.

Réponse. a) $\approx 0,073$ · b) $\approx 0,545$.

Correction de l'exercice 11 – Une enquête de satisfaction

Notons L : « achat en ligne » et S : « client satisfait ».

a) On divise chaque fois par le bon total.

— Global : $P(S) = \frac{996}{1200} = 0,83$, soit 83 %.

— En ligne : $P_L(S) = \frac{612}{720} = 0,85$, soit 85 % — on divise par le total de la **ligne**.

— En magasin : $P_{\bar{L}}(S) = \frac{384}{480} = 0,80$, soit 80 %.

b) Critère d'indépendance appliqué à L et $\bar{S}$:

— $P(L) = \frac{720}{1200} = 0,60$ et $P(\bar{S}) = \frac{204}{1200} = 0,17$.

— $P(L \cap \bar{S}) = \frac{108}{1200} = 0,09$.

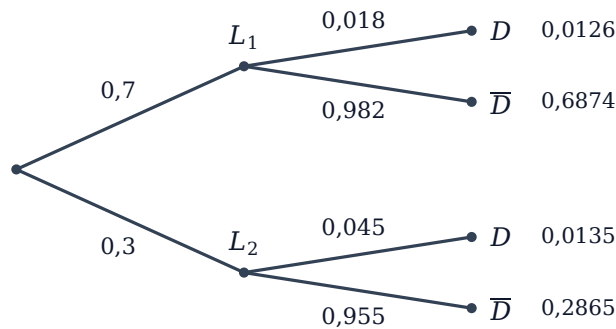
— Produit : $0,60 \times 0,17 = 0,102$.

— $0,09 \neq 0,102$: les événements **ne sont pas indépendants**. L'insatisfaction est moins fréquente en ligne (15 %) qu'en magasin (20 %).

Réponse. a) 83 % global, 85 % en ligne, 80 % en magasin · b) non : $0,09 \neq 0,102$.

Correction de l'exercice 12 – Le coût de la non-qualité

Arbre pondéré de la situation :



Ligne puis défaut

Notons L_1 , L_2 les lignes et D : « la pièce est défectueuse ».

a) Probabilités totales :

$$P(D) = 0,70 \times 0,018 + 0,30 \times 0,045 = 0,0126 + 0,0135 = 0,0261$$

— Soit 2,61 % de défauts.

b) Remontée :

$$P_D(L_2) = \frac{0,0135}{0,0261} \approx 0,517$$

— La ligne 2 ne produit que 30 % des pièces mais 51,7 % des défauts.

c) On passe de la probabilité au concret.

— Nombre de pièces défectueuses : $80\,000 \times 0,0261 = 2\,088$.

— Coût : $2\,088 \times 9 = 18\,792$ €.

— **Décision** : ramener la ligne 2 au niveau de la ligne 1 ferait tomber le taux à 1,8 %, soit 1 440 pièces et 12 960 € — près de 5 800 € économisés par an.

Réponse. a) 0,0261 · b) $\approx 0,517$ · c) 18 792 €.

Correction de l'exercice 13 – Choisir un fournisseur

a) Le coût moyen d'une pièce est le prix d'achat augmenté du surcoût **attendu**, c'est-à-dire du surcoût multiplié par la probabilité de défaut.

— Fournisseur A : $4,20 + 0,03 \times 15 = 4,20 + 0,45 = 4,65$ €.

— Fournisseur B : $3,90 + 0,06 \times 15 = 3,90 + 0,90 = 4,80$ €.

— Le fournisseur A est le moins cher, alors qu'il affiche le prix le plus élevé.

b) Écart par pièce : $4,80 - 4,65 = 0,15$ €.

— Sur 30 000 pièces : $30\,000 \times 0,15 = 4\,500$ € en faveur de A.

c) On note c le surcoût par pièce défectueuse et on cherche quand B devient plus avantageux, c'est-à-dire quand son coût moyen passe **sous** celui de A.

$$3,90 + 0,06c < 4,20 + 0,03c$$

— $0,06c - 0,03c < 4,20 - 3,90$, soit $0,03c < 0,30$.

— $c < 10$.

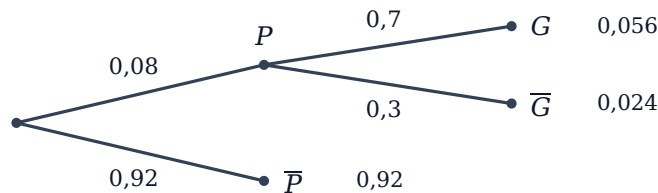
— B est donc plus intéressant si une pièce défectueuse coûte **moins de 10 €**. Au-dessus, la qualité de A l'emporte sur son prix.

- Vérification à $c = 10$: A donne $4,20 + 0,30 = 4,50$ € et B donne $3,90 + 0,60 = 4,50$ €. Les deux se valent exactement : le seuil est bon.

Réponse. a) A : 4,65 € · B : 4,80 € — b) 4 500 € en faveur de A — c) si le surcoût est inférieur à 10 €.

Correction de l'exercice 14 - Une garantie constructeur

Arbre pondéré de la situation :



P : panne dans les deux ans, G : réparation sous garantie

Notons P : « l'appareil tombe en panne dans les deux ans » et G : « la panne est couverte par la garantie ».

- Données : $P(P) = 0,08$ et $P_P(G) = 0,70$.

Étape 1 — probabilité d'une réparation sous garantie. C'est une intersection :

$$P(P \cap G) = P(P) \times P_P(G) = 0,08 \times 0,70 = 0,056$$

- Soit 5,6 % des appareils vendus.

Étape 2 — effectif prévisible.

- $12\,000 \times 0,056 = 672$ appareils.

Étape 3 — coût.

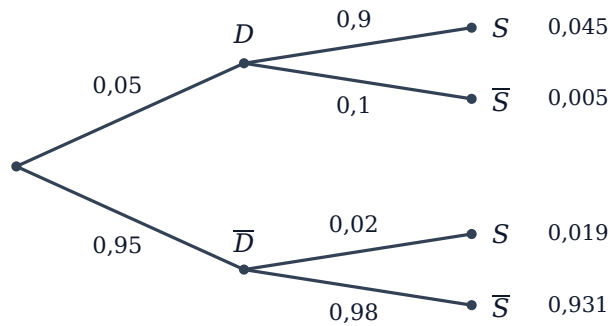
- $672 \times 180 = 120\,960$ €.

- **Lecture** : cela représente $\frac{120\,960}{12\,000} \approx 10,08$ € par appareil vendu. C'est le montant que le constructeur doit provisionner dans son prix de vente pour financer la garantie.
- **Piège** : ne pas multiplier par 0,70 seul (70 % ne sont pas 70 % des appareils, mais 70 % **des pannes**).

Réponse. 672 réparations, soit 120 960 €.

Correction de l'exercice 15 – Un contrôle imparfait

Arbre pondéré de la situation :



Défectueuse (D) ou non, puis signalée (S)

Notons D : « pièce défectueuse » et S : « pièce signalée par le contrôle ».

— Données : $P(D) = 0,05$, $P_D(S) = 0,90$, $P_{\bar{D}}(S) = 0,02$.

a) Probabilités totales :

$$P(S) = 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,02 = 0,045 + 0,019 = 0,064$$

— Soit 6,4 % des pièces signalées, pour seulement 5 % de pièces réellement défectueuses.

b) Remontée :

$$P_S(D) = \frac{0,045}{0,064} \approx 0,703$$

— Environ 70,3 % des pièces écartées le sont à juste titre ; les 29,7 % restants sont des pièces conformes rejetées pour rien.

c) Une pièce défectueuse part chez le client si elle **n'est pas** signalée.

— $P(D \cap \bar{S}) = 0,05 \times (1 - 0,90) = 0,05 \times 0,10 = 0,005$.

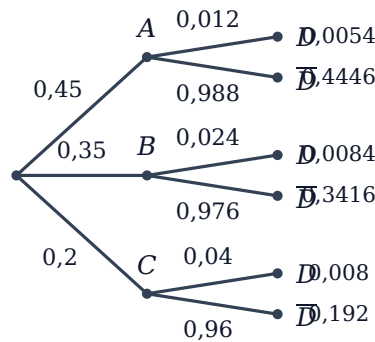
— Soit 0,5 % de la production, c'est-à-dire 5 pièces défectueuses pour 1 000 livrées.

— **Arbitrage industriel** : abaisser le taux de fausses alertes (2 %) économise du tri ; augmenter le taux de détection (90 %) protège le client. Les deux réglages jouent en sens contraire sur le même contrôle.

Réponse. a) 0,064 · b) $\approx 0,703$ · c) 0,005, soit 0,5 %.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : audit qualité de trois ateliers

Arbre pondéré de la situation :



Trois ateliers puis défaut

Notons A, B, C les ateliers (qui forment une partition) et D : « la pièce est défectueuse ».

a) Probabilités totales avec trois branches :

$$P(D) = 0,45 \times 0,012 + 0,35 \times 0,024 + 0,20 \times 0,040$$

- Chemin A : $0,45 \times 0,012 = 0,0054$.
- Chemin B : $0,35 \times 0,024 = 0,0084$.
- Chemin C : $0,20 \times 0,040 = 0,0080$.
- Somme : $P(D) = 0,0218$, soit 2,18 %.

b) Remontée :

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,0080}{0,0218} \approx 0,367$$

- L'atelier C fournit 20 % des pièces mais 36,7 % des défauts : c'est lui qu'il faut traiter en priorité.

c) Passage au concret.

- Nombre de défauts : $250\,000 \times 0,0218 = 5\,450$ pièces.
- Coût : $5\,450 \times 11 = 59\,950$ €.

d) On refait le calcul de a) en remplaçant 0,040 par 0,020 pour l'atelier C, les deux autres chemins étant inchangés.

- Nouveau chemin C : $0,20 \times 0,020 = 0,0040$.
- Nouveau taux : $0,0054 + 0,0084 + 0,0040 = 0,0178$, soit 1,78 %.
- Défauts : $250\,000 \times 0,0178 = 4\,450$ pièces, pour un coût de $4\,450 \times 11 = 48\,950$ €.
- Économie : $59\,950 - 48\,950 = 11\,000$ € par an.
- **Conclusion** : diviser par deux le taux de défauts d'un atelier qui ne pèse que 20 % de la production fait baisser le taux global de 2,18 % à 1,78 % et rapporte 11 000 € par an. C'est ce montant qu'on compare au prix de l'investissement pour décider.

Réponse. a) 0,0218 · b) $\approx 0,367$ · c) 59 950 € · d) 11 000 € d'économie annuelle.