

Plaquette 2 - Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

Probabilités conditionnelles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le tableau croisé. Il répartit les individus selon **deux** critères. Les marges donnent les totaux.

	B	$\bar{B}$	Total
A	a	b	$a + b$
$\bar{A}$	c	d	$c + d$
Total	$a + c$	$b + d$	N

Les trois probabilités à distinguer.

$$P(A \cap B) = \frac{a}{N} \quad P_A(B) = \frac{a}{a+b} \quad P_B(A) = \frac{a}{a+c}$$

- $P(A \cap B)$: on divise par le **total général**.
- $P_A(B)$: on divise par le total de la **ligne A**.
- $P_B(A)$: on divise par le total de la **colonne B**.

La formule qui les relie.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Repérer la bonne probabilité dans un énoncé.

Formulation	Probabilité
« la pièce est défectueuse et vient de A »	$P(A \cap D)$
« sachant qu' elle vient de A, elle est défectueuse »	$P_A(D)$
« parmi les pièces de A, la proportion de défectueuses »	$P_A(D)$
« parmi les défectueuses, celles qui viennent de A »	$P_D(A)$

⚠ $P_A(B)$ et $P_B(A)$ n'ont aucune raison d'être égales : c'est l'erreur la plus fréquente et la plus lourde de conséquences.

Correction de l'exercice 1 - Compléter un tableau

Dans chaque ligne et chaque colonne, les cases intérieures ont pour somme le total.

- **Ligne A** : conformes = $300 - 18 = 282$.
- **Ligne B** : défectueuses = $500 - 485 = 15$.
- **Colonne des défectueuses** : $18 + 15 = 33$.
- **Colonne des conformes** : $282 + 485 = 767$.

	Défectueuse	Conforme	Total
Atelier A	18	282	300
Atelier B	15	485	500
Total	33	767	800

Contrôle. Total général : $33 + 767 = 800$, et $300 + 500 = 800$.

Réponse. Conformés de A : 282 ; défectueuses de B : 15 ; totaux 33 et 767.

Correction de l'exercice 2 - Trois probabilités

Les trois probabilités ont le même numérateur, l'effectif de $A \cap D$ (18 pièces), mais pas le même dénominateur :

$$P(A \cap D) = \frac{18}{800} \quad P_A(D) = \frac{18}{300} \quad P_D(A) = \frac{18}{33}$$

- $P(A \cap D) = \frac{18}{800} = 0,0225$: on divise par le **total général** ;
- $P_A(D) = \frac{18}{300} = 0,06$: on divise par le total de la **ligne A** (taux de défaut de l'atelier A) ;
- $P_D(A) = \frac{18}{33} \approx 0,545$: on divise par le total de la **colonne** des défectueuses (part de A parmi les défauts).

Lecture. 6 % des pièces de A sont défectueuses, et A fournit environ 54,5 % des pièces défectueuses.

Réponse. $P(A \cap D) = 0,0225$; $P_A(D) = 0,06$; $P_D(A) \approx 0,545$.

Correction de l'exercice 3 - Vérifier la formule

La formule des probabilités composées s'écrit

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

- Membre de droite : $P(A) = \frac{300}{800} = 0,375$ et $P_A(D) = 0,06$, donc
 $P(A) \times P_A(D) = 0,375 \times 0,06 = 0,0225$.
- Membre de gauche : $P(A \cap D) = \frac{18}{800} = 0,0225$.

Les deux membres sont égaux.

Pourquoi. Avec des effectifs, l'effectif de A se simplifie :

$$\frac{300}{800} \times \frac{18}{300} = \frac{18}{800}$$

Réponse. $0,375 \times 0,06 = 0,0225 = P(A \cap D)$.

Correction de l'exercice 4 - Distinguer deux conditionnelles

On restreint l'univers à la condition :

$$P_B(D) = \frac{\text{effectif de } B \cap D}{\text{effectif de } B} = \frac{15}{500} = 0,03 \quad P_D(B) = \frac{15}{33} \approx 0,455$$

Pourquoi elles diffèrent. Elles ont le même numérateur (15 pièces défectueuses de B) mais pas la même population de référence :

- $P_B(D) = 0,03$: **parmi les pièces de B**, 3 % sont défectueuses ;
- $P_D(B) \approx 0,455$: **parmi les pièces défectueuses**, environ 45,5 % viennent de B.

Les pièces de B (500) sont bien plus nombreuses que les pièces défectueuses (33) :

diviser 15 par l'un ou l'autre donne des résultats très éloignés.

Réponse. $P_B(D) = 0,03$ et $P_D(B) \approx 0,455$: populations de référence différentes.

Correction de l'exercice 5 - Repérer la bonne probabilité

On repère dans chaque phrase la **population de référence**.

a) « 3 % **des machines** sont en panne **et** déclenchent l'alarme » : la référence est l'ensemble des machines, et les deux conditions sont réalisées ensemble. C'est une intersection :

$$P(M \cap A) = 0,03$$

b) « 95 % **des machines en panne** déclenchent l'alarme » : la référence est l'ensemble des machines en panne.

$$P_M(A) = 0,95$$

c) « 60 % **des alarmes** correspondent à une panne réelle » : la référence est l'ensemble des alarmes déclenchées.

$$P_A(M) = 0,6$$

Repère. « parmi les ... », « des ... qui ... » désignent la condition ; « ... et ... » sur l'ensemble désigne une intersection.

Réponse. a) $P(M \cap A) = 0,03$ — b) $P_M(A) = 0,95$ — c) $P_A(M) = 0,6$.

Correction de l'exercice 6 - Des fréquences plutôt que des effectifs

Avec des fréquences, on applique directement la définition :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

— $P_A(B) = \frac{0,12}{0,40} = 0,3$ (on divise par le total de la ligne A) ;

— $P_B(A) = \frac{0,12}{0,30} = 0,4$ (on divise par le total de la colonne B).

Remarque. $P_A(B) = 0,3 = P(B)$: A et B sont **indépendants** dans ce tableau. On le vérifie : $P(A) \times P(B) = 0,40 \times 0,30 = 0,12 = P(A \cap B)$.

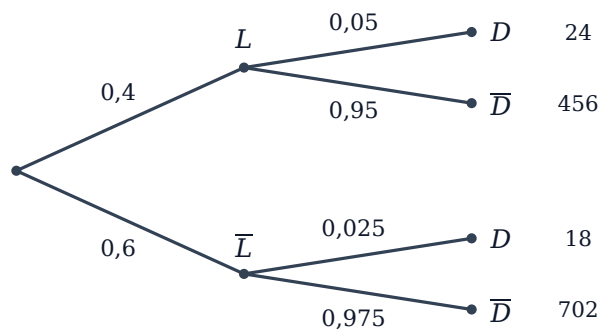
Réponse. $P_A(B) = 0,3$ et $P_B(A) = 0,4$.

Correction de l'exercice 7 - Un tableau à reconstruire

On note L « la pièce vient de la ligne 1 » et D « elle est défectueuse ». On calcule les effectifs en suivant l'arbre.

— $1200 \times 0,4 = 480$ pièces de la ligne 1, donc 720 pièces des autres lignes.

- Ligne 1 : $480 \times 0,05 = 24$ défectueuses, donc 456 conformes.
- Autres : $720 \times 0,025 = 18$ défectueuses, donc 702 conformes.



Effectifs au bout des chemins (sur 1200 pièces)

	Défectueuse	Conforme	Total
Ligne 1	24	456	480
Autres lignes	18	702	720
Total	42	1 158	1 200

Contrôle. $24 + 456 + 18 + 702 = 1200$.

Réponse. Ligne 1 : $24 / 456$; autres : $18 / 702$; total 42 défectueuses.

Correction de l'exercice 8 – Remonter à la ligne

On se restreint à la colonne des pièces défectueuses (42 pièces) :

$$P_D(L) = \frac{\text{effectif de } L \cap D}{\text{effectif de } D} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

Une pièce défectueuse vient de la ligne 1 dans environ 57 % des cas.

Par les probabilités. $P(L \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$ et $P(D) = 0,02 + 0,6 \times 0,025 = 0,035$, d'où $\frac{0,02}{0,035} = \frac{4}{7}$: même résultat.

Lecture. La ligne 1 produit 40 % des pièces mais 57 % des défauts : son taux de défaut est le double de celui des autres lignes.

Réponse. $P_D(L) = \frac{4}{7} \approx 0,571$.

Correction de l'exercice 9 – Un contraire conditionnel

Dans l'univers restreint à A , les événements B et $\bar{B}$ sont contraires : leurs probabilités conditionnelles ont pour somme 1.

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,72 = 0,28$$

Attention. Le passage au contraire porte sur l'événement **après** la barre (B), jamais sur la condition : $P_{\bar{A}}(B)$ n'a aucune raison de valoir 0,28.

Réponse. $P_A(\bar{B}) = 0,28$.

Correction de l'exercice 10 – Tester l'indépendance

On note C « la pièce est peinte » et H « elle est hors cote ». On teste l'égalité

$$P(C \cap H) = P(C) \times P(H)$$

- $P(C) = \frac{200}{500} = 0,4$ et $P(H) = \frac{80}{500} = 0,16$, donc $P(C) \times P(H) = 0,064$;
- $P(C \cap H) = \frac{32}{500} = 0,064$.

L'égalité est vérifiée : les deux caractères sont **indépendants**.

Lecture par les taux. Parmi les pièces peintes, $\frac{32}{200} = 16\%$ sont hors cote, exactement comme dans l'ensemble du lot : la peinture n'a pas d'influence sur la cote.

Réponse. Oui : $P(C \cap H) = 0,064 = 0,4 \times 0,16$.

Correction de l'exercice 11 - Une dépendance

Les marges sont les mêmes qu'à l'exercice précédent : $P(C) = 0,4$ et $P(H) = 0,16$, donc $P(C) \times P(H) = 0,064$. Mais cette fois

$$P(C \cap H) = \frac{48}{500} = 0,096 \neq 0,064$$

Les caractères ne sont **pas indépendants**.

Lecture par les taux. $P_C(H) = \frac{48}{200} = 0,24$: 24 % des pièces peintes sont hors cote, contre 16 % dans l'ensemble. Dans ce lot, être peint augmente le risque d'être hors cote (par exemple parce que la couche de peinture modifie les dimensions).

Réponse. Non : $0,096 \neq 0,064$; $P_C(H) = 0,24 > 0,16$.

Correction de l'exercice 12 - Une réunion

On applique la formule de la réunion :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= 0,45 + 0,30 - 0,12 = 0,63 \end{aligned}$$

Pourquoi retrancher 0,12. Les issues de $A \cap B$ sont comptées à la fois dans $P(A)$ et dans $P(B)$: sans correction, elles seraient comptées deux fois.

Contrôle. $P(A \cup B)$ est supérieur à $P(A)$ et à $P(B)$, et inférieur à 1.

Réponse. $P(A \cup B) = 0,63$.

Correction de l'exercice 13 - Un tableau de contrôle qualité

On note D « la pièce est vraiment défectueuse » et S « elle est signalée ».

Sensibilité. C'est la proportion de pièces défectueuses que le contrôle signale : on se restreint à la colonne des défectueuses.

$$P_D(S) = \frac{190}{200} = 0,95$$

Fausses alertes parmi les signalements. On se restreint cette fois à la ligne des pièces signalées (235), dont 45 sont conformes :

$$P_S(\overline{D}) = \frac{45}{235} \approx 0,191$$

Lecture. Le contrôle repère 95 % des défauts, mais environ 19 % des pièces signalées sont en réalité conformes.

Réponse. Sensibilité 0,95 ; fausses alertes $\approx 0,191$ des signalements.

Correction de l'exercice 14 - Calculer une spécificité

La spécificité est la proportion de pièces conformes que le contrôle **ne signale pas** : on se restreint à la colonne des pièces conformes (800).

$$P_{\overline{D}}(\overline{S}) = \frac{755}{800} = 0,94375$$

Commentaire. Environ 94,4 % des pièces conformes passent sans être signalées ; les 5,6 % restantes (45 pièces) sont des fausses alertes. Comme les pièces conformes sont quatre fois plus nombreuses que les défectueuses, ces 5,6 % suffisent à produire près d'un signalement sur cinq.

Réponse. Spécificité $\approx 0,944$.

Correction de l'exercice 15 - Deux lectures d'un même nombre

Ce que mesure le 95 %. C'est la **sensibilité** : parmi les pièces vraiment défectueuses, 95 % sont signalées.

$$P_D(S) = \frac{190}{200} = 0,95$$

Ce qu'affirme le responsable. « 95 % des pièces signalées sont vraiment défectueuses » concerne une autre population, celle des pièces signalées :

$$P_S(D) = \frac{190}{235} \approx 0,809$$

Seulement 80,9 % des pièces signalées sont vraiment défectueuses. Le responsable confond $P_D(S)$ et $P_S(D)$: même numérateur (190), dénominateurs différents (200 et 235).

Réponse. Non : $P_S(D) \approx 0,809$, et non 0,95 (qui est $P_D(S)$).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois ateliers

a) Le taux de défauts d'un atelier est une probabilité conditionnelle : on divise par l'effectif de sa ligne.

$$\text{— } X : \frac{30}{800} = 0,0375 ; Y : \frac{21}{700} = 0,03 ; Z : \frac{25}{500} = 0,05.$$

b) Taux global : $P(D) = \frac{76}{2000} = 0,038$. C'est la moyenne des taux pondérée par la part de chaque atelier (probabilités totales) :

$$P(D) = \frac{800}{2000} \times 0,0375 + \frac{700}{2000} \times 0,03 + \frac{500}{2000} \times 0,05 = 0,015 + 0,0105 + 0,0125 = 0,038$$

c) Dans la colonne des défectueuses : $P_D(Z) = \frac{25}{76} \approx 0,329$.

d) Perte : $76 \times 22 = 1\,672$ €. Si Z avait le taux de Y (3 %), il produirait $500 \times 0,03 = 15$ pièces défectueuses au lieu de 25 : 10 défauts de moins, soit une économie de $10 \times 22 = 220$ €.

Réponse. a) 0,0375 ; 0,03 ; 0,05 — b) 0,038 — c) $\approx 0,329$ — d) 1 672 € ; économie 220 €.