

MATHÉMATIQUES

Probabilités conditionnelles

Terminale STI2D

Arbre pondéré • Probabilité conditionnelle • Partition de l'univers
Probabilités totales • Inverser le conditionnement • Indépendance

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027), partie « Statistique et probabilités », section « Probabilités conditionnelles ». Il couvre :

- construire un arbre de probabilités et interpréter ses pondérations comme des probabilités conditionnelles ;
- lien entre $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et le produit des branches d'un chemin ;
- formule des probabilités totales pour une partition de l'univers en deux ou trois événements (démontrée) ;
- rappels : indépendance de deux événements.

Objectif : construire et exploiter un arbre de probabilités, et calculer la probabilité d'un événement à l'aide de la formule des probabilités totales.

Table des matières

1 Arbres pondérés	3
2 Formule des probabilités totales	3
3 Indépendance (rappel)	4
4 Erreurs classiques	4
5 Fiche de synthèse	4
6 Exercices d'application	5
7 Corrigés des exercices	5

1. Arbres pondérés

Probabilité conditionnelle

Pour $P(A) \neq 0$: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, d'où $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Règles des arbres

- Les branches issues d'un même nœud totalisent 1.
- Une branche du second niveau porte une probabilité **conditionnelle** : celle de l'événement au bout de la branche, sachant l'événement d'où elle part.
- Probabilité d'un chemin : **produit** des branches (c'est $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$).
- Probabilité d'un événement atteint par plusieurs chemins : **somme** des chemins.

2. Formule des probabilités totales

Partition de l'univers

Des événements A_1, A_2, A_3 de probabilités non nulles forment une **partition** de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles et si l'un d'eux est toujours réalisé. Exemple : A et $\bar{A}$.

Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

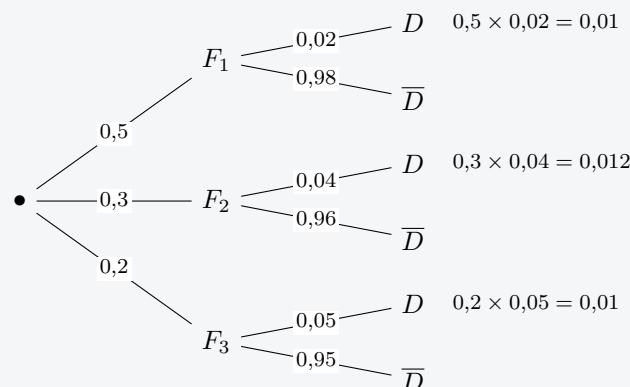
$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

Avec deux événements : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$.

Démonstration. Les événements $A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est B : donc $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$, et chaque terme vaut $P(A_i)P_{A_i}(B)$.

Trois fournisseurs

Une entreprise achète 50 % de ses composants au fournisseur F_1 , 30 % à F_2 et 20 % à F_3 ; les taux de composants défectueux sont 2 %, 4 % et 5 %.



F_1, F_2, F_3 forment une partition : $P(D) = 0,01 + 0,012 + 0,01 = 0,032$. Un composant sur 31 environ est défectueux.

Inverser le conditionnement

Pour obtenir $P_B(A)$ quand l'arbre donne $P_A(B)$: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, avec $P(A \cap B)$ lu sur un chemin et $P(B)$ obtenu par les probabilités totales.

Un composant est défectueux : il provient de F_3 avec la probabilité $P_D(F_3) = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125$. Bien que F_3 ne fournisse que 20 % des composants, il est à l'origine de plus de 31 % des défauts.

3. Indépendance (rappel)

Événements indépendants

Pour $P(A) \neq 0$: A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$, ce qui équivaut à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Sur un arbre, les branches du second niveau portent alors les mêmes probabilités quel que soit le premier résultat.

Dans l'exemple, $P_{F_1}(D) = 0,02 \neq P(D) = 0,032$: D et F_1 ne sont pas indépendants.

4. Erreurs classiques

À éviter

- Mettre $P(A \cap B)$ sur une branche à la place de $P_A(B)$.
- Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.
- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Appliquer la formule avec des événements qui ne forment pas une partition (qui se chevauchent ou ne couvrent pas tout).

5. Fiche de synthèse

Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
Arbre	nœud : somme 1 ; chemin : produit ; plusieurs chemins : somme
Probabilités totales	$P(B) = \sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ pour une partition (A_i)
Inverser	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Deux ateliers

70 % des pièces sortent de l'atelier A , les autres de l'atelier B . 3 % des pièces de A et 6 % de celles de B sont défectueuses. Construire l'arbre et calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

Exercice 2 – Inverser

Avec l'exercice 1, une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'atelier B ?

Exercice 3 – Trois modes de transport

Un salarié vient au travail en voiture (40 %), en transports en commun (45 %) ou à vélo (15 %). Il est en retard avec la probabilité 0,1 en voiture, 0,05 en transports et 0,02 à vélo. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $P(D) = 0,7 \times 0,03 + 0,3 \times 0,06 = 0,021 + 0,018 = 0,039$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $P_D(B) = \frac{0,018}{0,039} \approx 0,46$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $P(R) = 0,4 \times 0,1 + 0,45 \times 0,05 + 0,15 \times 0,02 = 0,04 + 0,0225 + 0,003 = 0,0655$.