

Plaquette 1 - Ajustement affine et changement de variable

Séries statistiques à deux variables — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes du cours.

- **Point moyen** : $G(\bar{x}; \bar{y})$; la droite d'ajustement affine passe toujours par G .
- Droite d'ajustement $y = ax + b$ (moindres carrés, à la calculatrice) ; a donne la variation moyenne de y quand x augmente de 1.
- **Quand le nuage est incurvé**, on cherche une transformation qui l'aligne :
- allure exponentielle (quotients successifs constants) $\Rightarrow$ poser $z = \log y$;
- allure inverse (produits xy constants) $\Rightarrow$ poser $z = \frac{1}{y}$;
- allure en racine ou en carré $\Rightarrow$ poser $z = y^2$ ou $z = \sqrt{y}$.
- **Retour à la variable initiale** après $z = \log y$ et un ajustement $z = ax + b$:

$$\log y = ax + b \Rightarrow y = 10^{ax+b} = 10^b \times (10^a)^x$$

On obtient un **modèle exponentiel** de la forme $y = A \times q^x$ avec $A = 10^b$ et $q = 10^a$.

- Après $z = \frac{1}{y}$ et $z = ax + b$: $y = \frac{1}{ax+b}$.
- **Interpolation** (dans la plage mesurée) : fiable. **Extrapolation** : à justifier.

Correction de l'exercice 1 - Point moyen et droite d'ajustement

a) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3.$

— $\bar{y} = \frac{0,8+1,3+1,7+2,3+2,9}{5} = \frac{9}{5} = 1,8.$

— Point moyen : $G(3; 1,8).$

b) $0,52 \times 3 + 0,24 = 1,56 + 0,24 = 1,8.$

— On retrouve exactement $\bar{y}$: la droite passe bien par G , comme l'affirme le cours.

Réponse. a) $G(3; 1,8)$ · b) $0,52 \times 3 + 0,24 = 1,8 = \bar{y}.$

Correction de l'exercice 2 - Estimer et interpréter

a) Chaque bar supplémentaire fait augmenter la tension de 0,52 V en moyenne : c'est la **sensibilité** du capteur.

b) $y = 0,52 \times 3,5 + 0,24 = 1,82 + 0,24 = 2,06$ V (interpolation, fiable).

c) On résout $0,52x + 0,24 = 2,5$: $0,52x = 2,26$, donc $x = \frac{2,26}{0,52} \approx 4,35$ bars.

Réponse. a) +0,52 V par bar · b) $\approx 2,06$ V · c) $\approx 4,35$ bars.

Correction de l'exercice 3 - Reconnaître un nuage non aligné

a) Différences : 25 ; 37,5 ; 56,25 ; 84,375 : elles **augmentent**.

— Quotients : $\frac{75}{50} = 1,5$; $\frac{112,5}{75} = 1,5$; $\frac{168,75}{112,5} = 1,5$; $\frac{253,125}{168,75} = 1,5$: ils sont **constants**.

b) Des quotients constants signalent un modèle **exponentiel** (ou géométrique) :

$$y = 50 \times 1,5^x.$$

- Un ajustement affine serait inadapté : le nuage est nettement incurvé vers le haut.
- Pour l'ajuster malgré tout, on posera $z = \log y$ (exercice suivant).

Réponse. a) différences croissantes, quotients constants = 1,5 · b) modèle exponentiel $y = 50 \times 1,5^x$.

Correction de l'exercice 4 - Changement de variable $z = \log y$

a) On calcule les logarithmes décimaux.

x_i	0	1	2	3	4
z_i	1,699	1,875	2,051	2,227	2,403

— $\log 50 \approx 1,699$; $\log 75 \approx 1,875$; $\log 112,5 \approx 2,051$; $\log 168,75 \approx 2,227$; $\log 253,125 \approx 2,403$.

b) Les différences successives valent toutes 0,176 : les points sont **alignés**.

- C'est la propriété clé : $\log$ transforme une croissance géométrique en croissance **affine**, car $\log(50 \times 1,5^x) = \log 50 + x \log 1,5$.
- Ici $\log 1,5 \approx 0,176$, ce qui est bien le pas constant observé.

Réponse. a) 1,699 ; 1,875 ; 2,051 ; 2,227 ; 2,403 · b) oui, différences constantes 0,176.

Correction de l'exercice 5 - Retour à la variable initiale

On revient à y en appliquant $10^{\cdot}$ à l'égalité $\log y = 0,176x + 1,699$:

$$y = 10^{0,176x + 1,699} = 10^{1,699} \times (10^{0,176})^x$$

- $10^{1,699} \approx 50,0$: c'est la valeur initiale A .
- $10^{0,176} \approx 1,50$: c'est la raison q .
- Donc $y \approx 50 \times 1,5^x$, exactement le modèle pressenti.
- Interprétation : la grandeur croît de 50 % par unité de x .

Réponse. $y \approx 50 \times 1,5^x$ (croissance de 50 % par unité).

Correction de l'exercice 6 - Prévision avec le modèle exponentiel

a) $1,5^6 = 11,390\,625$, donc $y = 50 \times 11,390\,625 \approx 569,5$.

b) Le modèle affine donnerait $y \approx 50,8 \times 6 + 50 = 304,8 + 50 = 354,8$.

- L'écart est énorme : 569,5 contre 354,8.
- Conclusion : quand le nuage est exponentiel, l'ajustement affine **sous-estime fortement** les valeurs futures. Le changement de variable n'est pas un détail théorique.

Réponse. a) $\approx 569,5$ · b) le modèle affine donnerait $\approx 354,8$: très sous-estimé.

Correction de l'exercice 7 - Changement de variable $z = 1/y$

a) Produits : $1 \times 120 = 120$; $2 \times 60 = 120$; $3 \times 40 = 120$; $4 \times 30 = 120$; $6 \times 20 = 120$.

— Ils sont tous égaux à 120.

b) Un produit constant signale des grandeurs **inversement proportionnelles** :

$$y = \frac{120}{x}$$

- Avec le changement de variable $z = \frac{1}{y}$, on obtient $z = \frac{x}{120}$, c'est-à-dire un modèle **affine** (et même linéaire) en x : le nuage $(x; z)$ est aligné et passe par l'origine.
- Interprétation : 120 est le travail total, en minutes-opérateur.

Réponse. a) tous égaux à 120 · b) $y = \frac{120}{x}$ (inversement proportionnel).

Correction de l'exercice 8 - Exploiter le modèle inverse

- a) $y = \frac{120}{5} = 24$ minutes.
- b) On résout $\frac{120}{x} < 15$: $120 < 15x$, donc $x > 8$. Il faut donc **au moins 9 opérateurs**.
- c) Non : le modèle prévoit $\frac{120}{100} = 1,2$ minute, ce qui est irréaliste — cent personnes ne peuvent pas travailler simultanément sur la même opération sans se gêner.
- Comme tout modèle, celui-ci n'est valable que sur une plage raisonnable, ici quelques opérateurs.

Réponse. a) 24 min · b) au moins 9 opérateurs · c) non, modèle irréaliste pour x grand.

Correction de l'exercice 9 - Choisir le bon changement de variable

- a) Quotients constants : croissance **géométrique**, on pose $z = \log y$; l'ajustement affine de z donne ensuite $y = A \times q^x$.
- b) Produits constants : grandeurs **inversement proportionnelles**, on pose $z = \frac{1}{y}$; l'ajustement donne $y = \frac{1}{ax + b}$.
- c) Différences constantes : le nuage est **déjà aligné**, aucun changement de variable n'est nécessaire, l'ajustement affine direct convient.
- Méthode générale : on calcule différences **et** quotients avant de choisir.

Réponse. a) $z = \log y$ · b) $z = \frac{1}{y}$ · c) aucun (ajustement affine direct).

Correction de l'exercice 10 - Problème : décroissance radioactive simplifiée

- a) On calcule les quotients : $\frac{640}{800} = 0,8$; $\frac{512}{640} = 0,8$; $\frac{409,6}{512} = 0,8$; $\frac{327,68}{409,6} = 0,8$.
- Les quotients sont constants : le modèle est bien **exponentiel**, de raison 0,8 (perte de 20 % par jour).
- b) $y = 800 \times 0,8^x$.
- c) $0,8^{10} \approx 0,107\,374$, donc $y \approx 800 \times 0,107\,374 \approx 85,9$ kBq.
- Contrôle de cohérence : la demi-vie vérifie $0,8^x = 0,5$, soit $x = \frac{\log 0,5}{\log 0,8} \approx 3,1$ jours. En 10 jours, on a donc un peu plus de trois demi-vies, soit environ $\frac{800}{8} = 100$ kBq. L'ordre de grandeur est confirmé.

Réponse. a) quotients constants = 0,8 · b) $y = 800 \times 0,8^x$ · c) $\approx 85,9$ kBq.

Correction de l'exercice 11 - Problème : étalonnage avec log

- a) On applique $10^{\cdot}$: $y = 10^{-0,097x + 2,903} = 10^{2,903} \times (10^{-0,097})^x$.
- $10^{2,903} \approx 800$ et $10^{-0,097} \approx 0,80$.
- Donc $y \approx 800 \times 0,80^x$.

- b) Pour $x = 0$: $y \approx 800$ (c'est $10^{2,903}$, la valeur initiale).
- c) Le coefficient $q \approx 0,80 = 1 - 0,20$: la grandeur **diminue de 20 %** à chaque augmentation de 1 de x .
- Règle à retenir : le signe du coefficient directeur de z donne le sens ($a < 0$: décroissance), et $q = 10^a$ donne le taux.

Réponse. a) $y \approx 800 \times 0,80^x$ · b) 800 · c) baisse de 20 %.

Correction de l'exercice 12 - Les résidus d'un ajustement

- a) La droite donne 3 ; 5 ; 7 ; 9. Les résidus, écarts entre la mesure et la droite, valent donc -0,1 ; 0,2 ; -0,2 ; 0,1.
- b) On additionne les carrés des résidus :

$$S = (-0,1)^2 + 0,2^2 + (-0,2)^2 + 0,1^2 = 0,01 + 0,04 + 0,04 + 0,01 = 0,10$$

Les résidus sont petits devant les valeurs mesurées et leurs signes alternent : les points sont répartis de part et d'autre de la droite, sans courbure. L'ajustement est bon. La droite des moindres carrés est, par définition, celle qui rend S le plus petit possible.

Réponse. a) -0,1 ; 0,2 ; -0,2 ; 0,1 · b) $S = 0,10$: résidus petits et alternés, ajustement satisfaisant.

Correction de l'exercice 13 - Changement de variable $t = 1/x$

- a) t vaut 1 ; 0,5 ; 0,333 ; 0,25 ; 0,167.
- b) Entre $t = 1$ et $t = 0,5$, y diminue de 6 quand t diminue de 0,5 : la pente vaut 12. On teste $y = 12t + 2$: il donne 14 ; 8 ; 6 ; 5 ; 4, exactement les mesures. Le nuage $(t; y)$ est aligné, et en revenant à x :

$$y = 12t + 2 = \frac{12}{x} + 2$$

Le coût unitaire se rapproche de 2 € pour les très grosses commandes : c'est le coût variable par pièce, auquel s'ajoute une part fixe répartie sur la commande.

Réponse. a) 1 ; 0,5 ; 0,333 ; 0,25 ; 0,167 · b) $y = 12t + 2$, soit $y = \frac{12}{x} + 2$.

Correction de l'exercice 14 - Distance de freinage et changement de variable

- a) Les vitesses augmentent de 20 en 20, mais les distances augmentent de 9, puis 15, puis 21 : les différences ne sont pas constantes, le nuage n'est **pas** aligné.
- b) Avec $t = v^2$, on obtient 400 ; 1 600 ; 3 600 ; 6 400. Les quotients $\frac{d}{t}$ valent tous 0,0075 : d est proportionnelle à t , et le nuage $(t; d)$ est aligné sur une droite passant par l'origine.

$$d = 0,0075 t = 0,0075 v^2$$

- c) Pour $v = 100$: $d = 0,0075 \times 10\,000 = 75$ m. C'est une extrapolation courte, plausible physiquement : doubler la vitesse quadruple la distance de freinage (3 m à 20 km/h, 12 m à 40 km/h).

Réponse. a) non · b) $\frac{d}{t} = 0,0075$ constant, donc $d = 0,0075 v^2$ · c) environ 75 m.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux modèles en concurrence

- a) Différences : -400 ; -368 ; -339 ; -311 : non constantes (elles diminuent en valeur absolue).

— Quotients : $\frac{4\,600}{5\,000} = 0,92$; $\frac{4\,232}{4\,600} = 0,92$; $\frac{3\,893}{4\,232} \approx 0,92$; $\frac{3\,582}{3\,893} \approx 0,92$: **constants**.

— Le modèle est donc **exponentiel** de raison 0,92 (baisse de 8 % par an).

b) $y = 5\,000 \times 0,92^x$.

— Pour $x = 8$: $0,92^8 \approx 0,513\,219$, donc $y \approx 2\,566$ kWh.

c) On résout $5\,000 \times 0,92^x < 2\,500$, soit $0,92^x < 0,5$.

— On applique le logarithme : $x \log 0,92 < \log 0,5$, et $\log 0,92 \approx -0,036\,21$ étant négatif, l'inégalité change de sens :

$$x > \frac{\log 0,5}{\log 0,92} \approx \frac{-0,301\,03}{-0,036\,21} \approx 8,31$$

— La consommation passe donc sous 2 500 kWh au bout de 9 **ans**.

— Contrôle : $y(8) \approx 2\,566$ kWh (encore au-dessus) et $y(9) \approx 2\,361$ kWh (en dessous).
Cohérent.

Réponse. a) modèle exponentiel ($q = 0,92$) · b) $y = 5\,000 \times 0,92^x$, $\approx 2\,566$ kWh à 8 ans ·
c) au bout de 9 ans.