

Plaquette 4 - Autres changements de variable

Séries statistiques à deux variables — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir la transformation.

Indice sur la série	Modèle	Transformation	Retour
différences constantes	$y = ax + b$	aucune	—
quotients constants	$y = Aq^x$	$z = \log y$	$y = 10^z$
produits xy constants	$y = \frac{k}{x}$	$z = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{z}$
y croît comme $\sqrt{x}$	$y = a\sqrt{x} + b$	$t = \sqrt{x}$	—
y^2 varie linéairement	$y = \sqrt{ax + b}$	$z = y^2$	$y = \sqrt{z}$

Le cas $z = \frac{1}{y}$. Après un ajustement $z = ax + b$:

$$\frac{1}{y} = ax + b \implies y = \frac{1}{ax + b}$$

- Si $b = 0$, on retrouve exactement $y = \frac{k}{x}$ avec $k = \frac{1}{a}$.
- Le modèle a une **valeur interdite** : $x = -\frac{b}{a}$, où le dénominateur s'annule.

Le cas $z = y^2$. Après $z = ax + b$:

$$y = \sqrt{ax + b}$$

valable seulement là où $ax + b \geq 0$.

Transformer la variable x . Poser $t = \sqrt{x}$ ou $t = \frac{1}{x}$ est aussi permis : on ajuste alors y en fonction de t , et aucun retour n'est nécessaire sur y .

△ Après **toute** transformation, on **vérifie l'alignement** avant d'ajuster : une transformation mal choisie donne un nuage aussi courbe que le premier.

Correction de l'exercice 1 - Calculer les inverses

On calcule l'inverse de chaque valeur de y :

x	1	2	3	4
z	0,025	0,05	0,075	0,1

Les z augmentent de 0,025 à chaque pas : le nuage $(x; z)$ est parfaitement aligné, et la droite passe par l'origine.

$$z = 0,025x$$

C'est le signe d'une proportionnalité inverse entre x et y : le produit xy vaut toujours 40.

Réponse. 0,025 ; 0,05 ; 0,075 ; 0,1, alignés selon $z = 0,025x$.

Correction de l'exercice 2 - Revenir à y

On part de l'ajustement, $\frac{1}{y} = 0,025x$, et on prend l'inverse des deux membres (pour $x > 0$) :

$$y = \frac{1}{0,025x} = \frac{40}{x}$$

car $\frac{1}{0,025} = 40$.

Vérification : le modèle donne 40 en $x = 1$ et 10 en $x = 4$, comme les mesures. Les produits xy valent tous 40 : x et y sont inversement proportionnels, de constante 40.

Réponse : $y = \frac{40}{x}$.

Réponse. $y = \frac{40}{x}$.

Correction de l'exercice 3 - Un modèle inverse décalé

a) On prend l'inverse des deux membres de $\frac{1}{y} = 0,04x + 0,02$:

$$y = \frac{1}{0,04x + 0,02}$$

À cause du terme constant 0,02, ce n'est **pas** une proportionnalité inverse : en $x = 0$, le modèle donne $\frac{1}{0,02} = 50$.

b) Pour $x = 5$, le dénominateur vaut $0,2 + 0,02 = 0,22$, d'où $y \approx 4,545$. La valeur interdite annule le dénominateur : $0,04x + 0,02 = 0$ donne $x = -0,5$. Elle est en dehors du domaine d'étude (positif) et ne gêne pas en pratique.

Réponse. a) $y = \frac{1}{0,04x + 0,02}$ · b) $y(5) \approx 4,545$; valeur interdite $x = -0,5$.

Correction de l'exercice 4 - Tester deux transformations

Test de $z = \log y$. On obtient 2 ; 1,699 ; 1,523 ; 1,398. Les différences, -0,301, -0,176 et -0,125, ne sont pas constantes : cette transformation ne donne pas un nuage aligné.

Test de $z = \frac{1}{y}$. On obtient 0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04, qui augmentent de 0,01 à chaque pas : alignement parfait, selon $z = 0,01x$. On revient à y :

$$y = \frac{1}{0,01x} = \frac{100}{x}$$

Contrôle : les produits xy valent tous 100. C'est donc le modèle inverse qui convient.

Réponse. Le logarithme échoue ; $z = \frac{1}{y}$ donne $y = \frac{100}{x}$.

Correction de l'exercice 5 - Une transformation sur x

Les y augmentent toujours de 6 (7, 13, 19, 25), mais les x augmentent de 3, puis 5, puis 7 : une même variation de y correspond à des variations de x différentes, donc le nuage $(x; y)$ n'est **pas** aligné.

Les x sont des carrés parfaits. En posant $t = \sqrt{x}$, on obtient $t = 1 ; 2 ; 3 ; 4$, qui augmentent de 1 quand y augmente de 6 : le nuage $(t; y)$ est aligné, de coefficient directeur 6. Pour $t = 1$, $y = 7$, donc l'ordonnée à l'origine vaut 1 :

$$y = 6t + 1 = 6\sqrt{x} + 1$$

Contrôle en $x = 16 : 6 \times 4 + 1 = 25$.

Réponse. Avec $t = \sqrt{x}$, on obtient $y = 6\sqrt{x} + 1$.

Correction de l'exercice 6 - Transformer y en son carré

On calcule $z = y^2 : 9 ; 25 ; 40,96$; environ 57,0. Les différences valent 16, 15,96 et 16,04 : elles sont constantes aux arrondis près, le nuage $(x ; z)$ est aligné.

Pour un pas de 2 en x , z augmente de 16 : le coefficient directeur vaut 8, et $z = 9$ en $x = 0$. D'où $z = 8x + 9$ et, comme $y > 0$,

$$y = \sqrt{8x + 9}$$

Contrôle en $x = 4 : \sqrt{41} \approx 6,40$. Ce modèle n'a de sens que pour $8x + 9 \geq 0$, soit $x \geq -1,125$.

Réponse. $z = 8x + 9$, donc $y = \sqrt{8x + 9}$.

Correction de l'exercice 7 - Une résistance et sa section

a) On calcule les produits $S \times R : 1,5 \times 12 = 18, 2,5 \times 7,2 = 18, 4 \times 4,5 = 18$ et $6 \times 3 = 18$. Ils sont constants : R est inversement proportionnelle à S , et la bonne transformation est $z = \frac{1}{R}$.

b) Les valeurs de z (environ 0,0833 ; 0,1389 ; 0,2222 ; 0,3333) sont proportionnelles à S , de coefficient environ $0,0556 = \frac{1}{18}$. On revient à $R :$

$$R = \frac{18}{S}$$

La constante 18 représente le produit de la résistivité par la longueur du câble (ρL).

Réponse. a) les produits $S \times R$ valent tous 18 · b) $R = \frac{18}{S}$.

Correction de l'exercice 8 - Une vitesse et une durée

a) On calcule les produits $v \times t : 40 \times 6 = 240, 50 \times 4,8 = 240, 60 \times 4 = 240$ et $80 \times 3 = 240$. Le produit est constant : vitesse et durée sont inversement proportionnelles. La constante est la distance du trajet, 240 km.

b) Le modèle s'écrit $t = \frac{240}{v}$, d'où

$$t(100) = \frac{240}{100} = 2,4 \text{ h}$$

soit 2 h 24 min. C'est une légère extrapolation, mais fiable car la relation est physique ($d = v \times t$). Le gain par rapport à 80 km/h n'est que de 36 min : accélérer fait gagner de moins en moins de temps.

Réponse. a) tous les produits valent 240 km · b) 2,4 h, soit 2 h 24 min.

Correction de l'exercice 9 - Un coût unitaire décalé

On teste d'abord les produits $n \times c : 1\,400 ; 1\,800 ; 2\,600 ; 4\,200$. Ils ne sont pas constants : ce n'est **pas** une proportionnalité inverse.

Le coût unitaire semble se rapprocher d'une valeur limite, autour de 8 €. On teste donc un modèle décalé, $c = \frac{k}{n} + 8$, en calculant $n(c - 8) : 50 \times 20 = 1\,000, 100 \times 10 = 1\,000, 200 \times 5 = 1\,000$ et $400 \times 2,5 = 1\,000$. Ce produit est constant, d'où

$$c = \frac{1\,000}{n} + 8$$

Contrôle en $n = 200$: $5 + 8 = 13$ €. On lit 1 000 € de frais fixes et 8 € de coût variable par pièce.

Réponse. Non : le modèle est $c = \frac{1\,000}{n} + 8$, avec un décalage de 8 €.

Correction de l'exercice 10 - Un modèle en racine

Les y augmentent de 3 à chaque colonne, mais les x augmentent de 5, 7 puis 9 : le nuage $(x; y)$ n'est pas aligné. Les x sont des carrés parfaits ; on pose $t = \sqrt{x}$, qui vaut 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Quand t augmente de 1, y augmente de 3 : le nuage $(t; y)$ est aligné, de coefficient directeur 3. L'ordonnée à l'origine vaut $6 - 3 \times 2 = 0$, d'où

$$y = 3\sqrt{x}$$

Contrôle en $x = 25$: $3 \times 5 = 15$. Quadrupler la puissance (de 4 à 16 W) double la portée (de 6 à 12 km).

Réponse. $y = 3\sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 11 - Exploiter le modèle en racine

a) $y(36) = 3\sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$ km.

b) On résout l'équation, en isolant la racine puis en élevant au carré (les deux membres sont positifs) :

$$3\sqrt{x} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64 \text{ W}$$

Vérification : $3 \times 8 = 24$. Une portée de 12 km demandait 16 W ; doubler la portée demande donc de **quadrupler** la puissance. Les grandes portées coûtent très cher en énergie.

Réponse. a) 18 km · b) 64 W.

Correction de l'exercice 12 - Choisir parmi trois transformations

On cherche ce qui reste constant dans chaque série.

a) Les quotients valent 2, 2 et 2 : modèle exponentiel $y = 5 \times 2^x$, transformation $z = \log y$.

b) Les produits xy valent tous 120 : modèle inverse $y = \frac{120}{x}$, transformation $z = \frac{1}{y}$.

c) Les x sont des carrés parfaits ; avec $t = \sqrt{x}$ (1 ; 2 ; 3 ; 4), y augmente de 4 quand t augmente de 1 : transformation $t = \sqrt{x}$, modèle

$$y = 4\sqrt{x}$$

Méthode : tester les quotients, puis les produits, puis les racines.

Réponse. a) $z = \log y$ · b) $z = \frac{1}{y}$ · c) $t = \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 13 - Une transformation qui échoue

Test de $z = \log y$. On obtient environ 0,301 ; 0,699 ; 1 ; 1,230. Les différences (0,398, 0,301, 0,230) ne sont pas constantes : échec.

Test de $z = \frac{1}{y}$. On obtient 0,5 ; 0,2 ; 0,1 ; environ 0,059. Les différences ne sont pas constantes non plus : échec.

En regardant les valeurs, on reconnaît $y = x^2 + 1$: $1 + 1 = 2$, $4 + 1 = 5$, $9 + 1 = 10$, $16 + 1 = 17$. Avec $t = x^2$, le nuage devient (1 ; 2), (4 ; 5), (9 ; 10), (16 ; 17), parfaitement aligné :

$$y = t + 1$$

Aucune transformation n'est universelle : on choisit celle que suggèrent les données.

Réponse. Les deux échouent ; il fallait poser $t = x^2$, ce qui donne $y = x^2 + 1$.

Correction de l'exercice 14 - Deux droites à départager

On calcule, pour chaque droite, les résidus $y_i - (ax_i + b)$, puis la somme de leurs carrés.

- Pour D_1 , les valeurs de la droite sont 1,1 ; 2,7 ; 4,3 ; 5,9, et les résidus -0,1 ; 0,3 ; -0,3 ; 0,1.
- Pour D_2 , les valeurs sont 0,5 ; 2,5 ; 4,5 ; 6,5, et les résidus 0,5 ; 0,5 ; -0,5 ; -0,5.

$$S_1 = 0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,01 = 0,2 \quad S_2 = 4 \times 0,25 = 1$$

La droite D_1 donne la plus petite somme des carrés des résidus : au sens des moindres carrés, elle ajuste mieux le nuage. On vérifie d'ailleurs qu'elle passe par le point moyen $G(1,5 ; 3,5)$: $1,6 \times 1,5 + 1,1 = 3,5$. C'est la droite des moindres carrés de cette série.

Réponse. $S_1 = 0,2$ et $S_2 = 1$: on retient D_1 , qui passe d'ailleurs par le point moyen $G(1,5 ; 3,5)$.

Correction de l'exercice 15 - Un étalonnage inverse

- a) On calcule les produits $T \times R$: $10 \times 20 = 200$, $20 \times 10 = 200$, $30 \times 6,67 \approx 200$ et $40 \times 5 = 200$. Ils sont constants aux arrondis près, d'où le modèle

$$R = \frac{200}{T}$$

- b) À 25 °C, $R = \frac{200}{25} = 8 \text{ k}\Omega$. Inversement, $R = 8 \text{ k}\Omega$ donne $T = \frac{200}{8} = 25 \text{ °C}$: les deux questions se répondent.

Le calculateur du capteur utilisera $T = \frac{200}{R}$. Ce modèle ne vaut que sur la plage mesurée, [10 ; 40] °C : en 0 °C, il n'a plus de sens.

Réponse. a) $R = \frac{200}{T}$ · b) 8 kΩ à 25 °C, et 25 °C pour 8 kΩ.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois modèles pour trois relevés

- a) On cherche ce qui reste constant. Série A : les produits xy valent tous 300, modèle **inverse**. Série B : les quotients valent tous 1,5, modèle **exponentiel**. Série C : les différences valent toutes 5, modèle **affine**.

- b) A : $y = \frac{300}{x}$. B : la valeur en $x = 1$ est 50, donc en $x = 0$ elle vaut $\frac{50}{1,5} \approx 33,33$, et $y = 33,33 \times 1,5^x$. C : $y = 5x + 9$.

- c) En $x = 6$: A donne 50, B donne $33,33 \times 1,5^6 \approx 380$ et C donne 39.

- d) La série A est décroissante : elle ne dépassera jamais 500. Pour C, $5x + 9 > 500$ donne $x > 98,2$, soit $x = 99$. Pour B :

$$1,5^x > 15 \Leftrightarrow x > \frac{\log 15}{\log 1,5} \approx 6,68$$

soit $x = 7$ ($33,33 \times 1,5^7 \approx 570$). La série **B** dépasse 500 en premier : à long terme, une croissance exponentielle l'emporte toujours sur une croissance affine.

Réponse. a) A inverse, B exponentielle, C affine · b) $\frac{300}{x}$; $33,33 \times 1,5^x$; $5x + 9$ · c) 50 ; environ 380 ; 39 · d) la série B, dès $x = 7$.