

Plaquette 3 - Changement de variable $z = \log y$

Séries statistiques à deux variables — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Reconnaître le cas.

Indice	Modèle
différences constantes	affine : $y = ax + b$
quotients constants	exponentiel : $y = A \times q^x$
produits xy constants	inverse : $y = \frac{k}{x}$

La méthode, en quatre gestes.

1. Poser $z = \log y$ et calculer les z_i . 2. Vérifier que le nuage $(x; z)$ est **aligné** (différences constantes, ou résidus petits et de signes alternés). 3. Ajuster : $z = ax + b$. 4. Revenir à y :

$$\log y = ax + b \implies y = 10^{ax+b} = 10^b \times (10^a)^x$$

Le modèle obtenu.

$$y = A \times q^x \quad \text{avec} \quad A = 10^b \quad \text{et} \quad q = 10^a$$

— A est la valeur en $x = 0$.

— q est le coefficient multiplicateur par unité de x , donc le taux vaut $q - 1$.

Pourquoi ça marche. Si $y = Aq^x$, alors $\log y = \log A + x \log q$: le logarithme transforme une relation exponentielle en relation **affine**.

⚠ Deux erreurs à éviter : oublier de revenir à y (la réponse attendue porte sur y , pas sur z), et confondre 10^b avec b .

Correction de l'exercice 1 - Calculer les z

On calcule le logarithme décimal de chaque valeur de y :

x	0	1	2	3
z	1,699	1,875	2,051	2,227

Les différences successives des z valent toutes 0,176 : le nuage $(x; z)$ est **aligné**.

$$z_{k+1} - z_k = \log \frac{y_{k+1}}{y_k}$$

Des différences de z constantes signifient donc des quotients de y constants : le modèle de départ était bien exponentiel.

Réponse. 1,699 ; 1,875 ; 2,051 ; 2,227, avec des différences constantes de 0,176.

Correction de l'exercice 2 - Justifier le changement de variable

On calcule les quotients de deux valeurs consécutives :

$$\frac{75}{50} = \frac{112,5}{75} = \frac{168,75}{112,5} = 1,5$$

On passe d'une valeur à la suivante en multipliant toujours par 1,5 : le modèle est exponentiel, $y = 50 \times 1,5^x$, soit une hausse de 50 % par unité de x .

On retrouve l'exercice précédent : $\log 1,5 \approx 0,176$, qui est exactement la différence constante des z .

Réponse. Les quotients valent tous 1,5 : le modèle est $y = 50 \times 1,5^x$.

Correction de l'exercice 3 - Du modèle ajusté au modèle exponentiel

Puisque $z = \log y$, on revient à y en prenant la puissance de 10 :

$$y = 10^{0,12x + 1,4} = 10^{1,4} \times (10^{0,12})^x \approx 25,12 \times 1,318^x$$

La valeur en $x = 0$ vaut $A = 10^{1,4} \approx 25,12$ et le coefficient multiplicateur par unité vaut $q = 10^{0,12} \approx 1,318$, soit une hausse d'environ 31,8 % **par unité**.

Contrôle : $\log 25,12 \approx 1,4$, l'ordonnée à l'origine de l'ajustement.

Réponse. $y \approx 25,12 \times 1,318^x$, soit environ +31,8 % par unité.

Correction de l'exercice 4 - Un coefficient négatif

On revient à y par la puissance de 10 :

$$y = 10^{2,6} \times (10^{-0,08})^x \approx 398,11 \times 0,832^x$$

Le coefficient directeur de l'ajustement est négatif, donc $q = 10^{-0,08} \approx 0,832$ est inférieur à 1 : le modèle est **décroissant**, avec une baisse d'environ 16,8 % par unité.

Contrôle en $x = 5$: le modèle donne $398,11 \times 0,832^5 \approx 158,7$, et l'ajustement donne $z = 2,2$, soit $y = 10^{2,2} \approx 158,5$. Les deux valeurs concordent aux arrondis près.

Réponse. $y \approx 398,11 \times 0,832^x$, soit environ -16,8 % par unité.

Correction de l'exercice 5 - Une série complète

a) Les valeurs de x avancent de 2 en 2. Les quotients valent $\frac{288}{200} = 1,44$, puis environ 1,44 et 1,44 : ils sont constants, le modèle est **exponentiel**. Attention : 1,44 est le coefficient pour **deux** unités de x .

b) Le coefficient q par unité vérifie $q^2 = 1,44$, donc

$$q = \sqrt{1,44} = 1,2$$

soit une hausse de 20 % **par unité**, et le modèle $y = 200 \times 1,2^x$. **Contrôle** : $200 \times 1,2^6 \approx 597,2$. Annoncer +44 % par unité serait une erreur.

Réponse. a) quotients constants à 1,44 pour un pas de 2 · b) +20 % par unité, soit $y = 200 \times 1,2^x$.

Correction de l'exercice 6 - Utiliser le modèle pour prévoir

On remplace x par 10 : $y(10) = 200 \times 1,2^{10} \approx 200 \times 6,1917 \approx 1\,238$.

Pour le seuil, on résout $200 \times 1,2^x = 2\,000$, soit $1,2^x = 10$, avec le logarithme :

$$x = \frac{\log 10}{\log 1,2} = \frac{1}{\log 1,2} \approx 12,63$$

Le modèle étant croissant, y dépasse 2 000 à partir de $x = 13$ pour des valeurs entières.

Vérification : $y(12) \approx 1\,783$ et $y(13) \approx 2\,140$.

Réponse. $y(10) \approx 1\,238$; le seuil 2 000 est dépassé à partir de $x = 13$.

Correction de l'exercice 7 - Un relevé imparfait

On calcule les quotients de deux valeurs consécutives : $\frac{121}{84} \approx 1,440$, $\frac{174}{121} \approx 1,438$ et $\frac{252}{174} \approx 1,448$. Ils ne sont pas rigoureusement égaux, mais ils varient de moins de 1 % autour de 1,44 : c'est normal pour des mesures, et le modèle exponentiel **convient**.

On retient $q = 1,44$. La valeur en $x = 0$ vaut $\frac{84}{1,44} \approx 58,3$, d'où

$$y \approx 58,3 \times 1,44^x$$

Contrôle en $x = 4$: $58,3 \times 1,44^4 \approx 250,7$, à moins de 1 % de la mesure 252.

Réponse. Oui : les quotients valent tous environ 1,44, le modèle est $y \approx 58,3 \times 1,44^x$.

Correction de l'exercice 8 - Lire les résidus pour choisir

Les résidus de l'ajustement affine dessinent un **arc** : positifs aux deux extrémités, négatifs au milieu. Les points ne sont donc pas répartis au hasard autour de la droite ; ils suivent une courbe que la droite coupe deux fois. Le nuage est **incurvé**, et le modèle affine est mal choisi.

Après le changement de variable $z = \log y$, les résidus sont petits et de signes alternés : le nuage $(x; z)$ est bien aligné. On retient donc le modèle **exponentiel** :

$$z = ax + b \implies y = 10^b \times (10^a)^x$$

Garder la droite « parce qu'elle est plus simple » serait une erreur, surtout pour extrapoler.

Réponse. Le modèle exponentiel : le nuage $(x; y)$ est incurvé, le nuage $(x; \log y)$ est aligné.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver la valeur initiale

a) L'année 2020 correspond à $x = 0$, donc $z = 1,875$ et $y = 10^{1,875} \approx 75$.

b) Le coefficient multiplicateur annuel vaut

$$q = 10^{0,045} \approx 1,1092$$

soit une hausse d'environ 10,9 % **par an**, et le modèle $y \approx 75 \times 1,109^x$.

Contrôle en $x = 5$: $z = 0,045 \times 5 + 1,875 = 2,1$, donc $y = 10^{2,1} \approx 125,9$, et le modèle donne aussi $75 \times 1,109^5 \approx 125,8$. En 2030, il prévoit environ 211.

Réponse. a) environ 75 · b) environ +10,9 % par an.

Correction de l'exercice 10 - Un modèle de décroissance

a) Les mesures sont espacées de 5 h. Les quotients valent $\frac{2\,828}{4\,000} = 0,707$, $\frac{2\,000}{2\,828} \approx 0,707$ et $\frac{1\,414}{2\,000} = 0,707$: ils sont constants, le modèle est **exponentiel**.

b) L'activité passe de 4 000 à 2 000 Bq en 10 h, et de 2 828 à 1 414 Bq aussi en 10 h : la demi-vie vaut 10 **heures**. C'est cohérent : $0,707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$, et deux périodes de 5 h multiplient par $0,707^2 = 0,5$.

Le coefficient horaire vaut $0,707^{\frac{1}{5}} \approx 0,933$, soit environ $-6,7\%$ par heure :

$$0,933^{10} \approx 0,5$$

Réponse. a) quotients constants à $0,707$ · b) demi-vie de 10 heures.

Correction de l'exercice 11 - Deux pas différents

Sur 4 ans, on multiplie quatre fois par le coefficient annuel q : $q^4 = 1,69$. Comme $1,69 = 1,3^2$, on a $q^2 = 1,3$ et

$$q = \sqrt{1,3} \approx 1,1402$$

Le taux annuel vaut environ $14,02\%$. **Vérification** : $1,1402^4 \approx 1,690$.

Diviser 69% par 4 donnerait $17,25\%$, trop : quatre hausses de $17,25\%$ multiplient par $1,1725^4 \approx 1,89$, et non par $1,69$.

Réponse. Environ $+14,02\%$ par an.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur de retour

L'élève a confondu z et y : l'ajustement porte sur $z = \log y$, pas sur y . Il faut revenir à y par la puissance de 10 :

$$y = 10^z = 10^{0,2x + 1,6} = 10^{1,6} \times (10^{0,2})^x \approx 39,81 \times 1,585^x$$

L'écart est énorme : en $x = 2$, le bon modèle donne environ 100, alors que la version fautive donne 2, cinquante fois moins. Une transformation se termine toujours par le retour à la grandeur d'origine.

Réponse. Il faut $y = 10^z$, soit $y \approx 39,81 \times 1,585^x$.

Correction de l'exercice 13 - Un étalonnage logarithmique

a) On calcule les logarithmes : $\log 100 = 2$, $\log 63,1 \approx 1,800$, $\log 39,8 \approx 1,600$ et $\log 25,1 \approx 1,400$. Ils diminuent de $0,2$ tous les 10 km : le nuage $(d; z)$ est aligné, selon

$$z = -0,02d + 2$$

b) Une atténuation en décibels vaut 10 fois la variation du logarithme de la puissance. Ici, $\log P$ diminue de $0,02$ par kilomètre, donc l'atténuation vaut $10 \times 0,02 = 0,2$ dB/km.

Contrôle sur 30 km : 6 dB d'atténuation correspondent à un rapport $10^{-0,6} \approx 0,251$, soit $25,1$ mW, comme la mesure.

Réponse. a) z décroît de $0,2$ tous les 10 km · b) $0,2$ dB/km.

Correction de l'exercice 14 - Choisir entre deux transformations

On teste quotients et produits pour reconnaître le modèle.

a) Les quotients valent $0,5$, $0,5$ et $0,5$: on multiplie toujours par $0,5$, le modèle est exponentiel, $y = 100 \times 0,5^x$. On pose $z = \log y$.

b) Les produits xy valent tous 60 : le modèle est inverse, $y = \frac{60}{x}$. On pose $z = \frac{1}{y}$, car alors

$$z = \frac{x}{60}$$

est une relation linéaire. **Contrôle** : pour b), les quotients ($0,5$; $0,667$; $0,75$) ne sont pas constants, ce qui exclut le modèle exponentiel.

Réponse. a) $z = \log y$ (exponentielle) · b) $z = \frac{1}{y}$ (inverse).

Correction de l'exercice 15 - Un modèle mal choisi

On calcule $z = \log y$: environ 1,778, 1,477, 1,301 et 1,176. Les différences valent $-0,301$, $-0,176$ et $-0,125$: elles diminuent nettement en valeur absolue, le nuage $(x; z)$ n'est **pas** aligné. Le modèle exponentiel ne convient pas.

Les produits xy valent tous 60 : il fallait poser $z = \frac{1}{y}$. On obtient alors

$$z \approx 0,0167 ; 0,0333 ; 0,05 ; 0,0667$$

qui augmentent de 0,0167 à chaque pas : alignement parfait. On vérifie toujours l'alignement après la transformation, avant d'ajuster.

Réponse. Les différences des z ($-0,301$; $-0,176$; $-0,125$) ne sont pas constantes : il fallait poser $z = \frac{1}{y}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : la montée en charge d'un service

a) Les quotients $\frac{1\,680}{1\,200}$, $\frac{2\,352}{1\,680}$, $\frac{3\,293}{2\,352}$ et $\frac{4\,610}{3\,293}$ valent tous 1,4 aux arrondis près : le modèle est **exponentiel**, de coefficient 1,4 par an.

b) $z(0) = \log 1\,200 \approx 3,0792$ et $z(4) = \log 4\,610 \approx 3,6637$. La droite passant par ces deux points a pour coefficient directeur $\frac{3,6637 - 3,0792}{4} \approx 0,1461$, d'où

$z \approx 0,1461x + 3,0792$. **Contrôle** : $\log 1,4 \approx 0,1461$.

c) On revient à y :

$$y = 10^{3,0792} \times \left(10^{0,1461}\right)^x \approx 1\,200 \times 1,4^x$$

soit une hausse de 40 % **par an**.

d) On résout $1\,200 \times 1,4^x = 20\,000$, soit $1,4^x = \frac{20\,000}{1\,200} \approx 16,667$, d'où

$x = \frac{\log 16,667}{\log 1,4} \approx 8,36$. Le seuil est franchi pour $x = 9$, c'est-à-dire en **2030** (

$1\,200 \times 1,4^8 \approx 17\,709$ et $1\,200 \times 1,4^9 \approx 24\,793$). Cette prévision porte cinq ans au-delà des mesures : une croissance de 40 % par an ne se maintient jamais longtemps (saturation du marché, capacité technique), il faut donc l'assortir de réserves.

Réponse. a) quotients tous égaux à 1,4 · b) $z \approx 0,1461x + 3,0792$ · c) $y \approx 1\,200 \times 1,4^x$, soit +40 % par an · d) en 2030, sous réserve que le rythme se maintienne.