

MATHÉMATIQUES

Séries statistiques à deux variables

Terminale STI2D

Nuage de points • Point moyen • Moindres carrés • Changement de variable
 $\log y$ • $\frac{1}{x}$ • Ajustement exponentiel • Interpolation • Extrapolation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027), partie « Statistique et probabilités », section « Séries statistiques à deux variables quantitatives ». Il couvre :

- rappels de première : nuage, point moyen, ajustement affine (au jugé, Mayer, moindres carrés), interpolation et extrapolation ;
- changement de variable donné ($u = t^2$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\log y \dots$) pour conjecturer une relation affine entre les nouvelles variables ;
- ajustement se ramenant à un ajustement affine ;
- **algorithmes** : calcul automatique de $\sum (y_i - (ax_i + b))^2$ et recherche d'un couple $(a; b)$ qui la minimise.

Objectif : ajuster un nuage de points, directement ou après un changement de variable, et utiliser l'ajustement obtenu pour estimer des valeurs avec esprit critique.

Table des matières

1	Rappels : ajustement affine	3
2	Changement de variable	3
3	Algorithmes	4
4	Erreurs classiques	5
5	Fiche de synthèse	5
6	Exercices d'application	5
7	Corrigés des exercices	5

1. Rappels : ajustement affine

Ce que l'on sait

- Le point moyen d'un nuage $(x_i; y_i)$ est $G(\bar{x}; \bar{y})$.
- La droite des **moindres carrés** $y = ax + b$ rend minimale la somme $S = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$; la calculatrice ou le tableur en donnent a et b , et elle passe par G .
- On l'utilise pour interpoler (dans la plage des données) ou extrapoler (en dehors, avec prudence).

2. Changement de variable

Principe

Quand le nuage $(x_i; y_i)$ est **courbe**, on transforme l'une des variables (par exemple $z = \log y$ ou $u = \frac{1}{x}$); si le nouveau nuage est allongé autour d'une droite, on l'ajuste par une droite, puis on **revient** aux variables d'origine.

Une croissance exponentielle : $z = \log y$

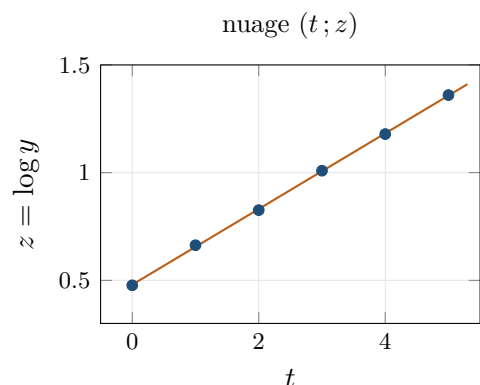
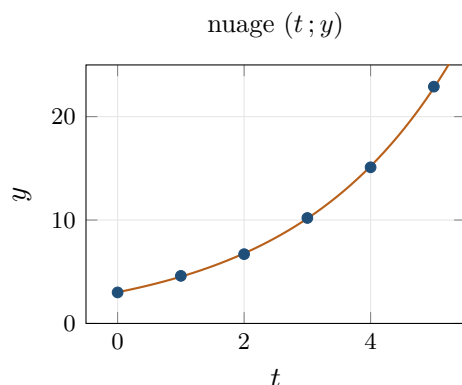
Population y (en milliers) d'une culture cellulaire en fonction du temps t (en jours) :

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3,0	4,6	6,7	10,2	15,1	22,9
$z_i = \log y_i$	0,477	0,663	0,826	1,009	1,179	1,360

Le nuage $(t_i; z_i)$ est presque aligné. Les moindres carrés donnent $z \approx 0,176t + 0,480$. On revient à y :

$$y = 10^z \approx 10^{0,480} \times (10^{0,176})^t \approx 3,02 \times 1,50^t.$$

La population est multipliée par environ 1,5 chaque jour. Estimation pour $t = 7$: $y \approx 51$ milliers (extrapolation, à prendre avec prudence).



À gauche le nuage courbe ; à droite, après le changement de variable $z = \log y$, des points alignés.

Loi de Boyle-Mariotte : $u = \frac{1}{V}$

Pression P (bar) d'un gaz en fonction de son volume V (L), à température constante :

V_i	1	2	3	4	5
P_i	6,0	3,1	2,0	1,5	1,2
$u_i = \frac{1}{V_i}$	1	0,5	0,333	0,25	0,2

Les points $(u_i; P_i)$ sont alignés : les moindres carrés donnent $P \approx 6,01u + 0,02$, soit $P \approx \frac{6}{V}$: le produit PV est à peu près constant. Pour $V = 2,5$ L : $P \approx 2,4$ bar.

Quel changement de variable ?

Il est donné par l'énoncé ou suggéré par la physique de la situation : $\log y$ pour une évolution relative constante, $\frac{1}{x}$ pour une grandeur inversement proportionnelle, x^2 pour une énergie ou une distance de freinage, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour une dispersion d'échantillons...

3. Algorithmes

Calculer la somme des carrés des écarts

```
def S(a, b, X, Y):
    s = 0
    for i in range(len(X)):
        s = s + (Y[i] - (a * X[i] + b))**2
    return s
```

Chercher un bon couple par balayage

```
def balayage(X, Y):
    meilleur = (0, 0, S(0, 0, X, Y))
    for i in range(0, 101):          # a de 0 à 10 par pas de 0,1
        for j in range(-100, 101):   # b de -10 à 10 par pas de 0,1
            a, b = i / 10, j / 10
            s = S(a, b, X, Y)
            if s < meilleur[2]:
                meilleur = (a, b, s)
    return meilleur
```

Le couple trouvé est proche de celui des moindres carrés, à la précision du pas près.

4. Erreurs classiques

À éviter

- Ajuster par une droite un nuage manifestement courbe.
- Oublier de revenir aux variables d'origine après le changement de variable.
- Écrire $10^{at+b} = 10^{at} + 10^b$ au lieu de $10^b \times (10^a)^t$.
- Extrapoler loin des données comme si le modèle restait valable.

5. Fiche de synthèse

Moindres carrés	minimise $\sum (y_i - ax_i - b)^2$; passe par $G(\bar{x}; \bar{y})$
Changement de variable	transformer, ajuster par une droite, revenir aux variables d'origine
$z = \log y$	$z = at + b$ donne $y = 10^b \times (10^a)^t$
$u = \frac{1}{x}$	$y = au + b$ donne $y = \frac{a}{x} + b$
Prudence	interpoler plutôt qu'extrapoler

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Revenir à la variable

Après le changement de variable $z = \log y$, on obtient l'ajustement $z = 0,1t + 2$. Exprimer y en fonction de t et calculer y pour $t = 3$.

Exercice 2 – Distance de freinage

Pour des vitesses v (en km/h) et des distances de freinage d (en m), on pose $u = v^2$ et l'on obtient l'ajustement $d \approx 0,006 u$. Estimer la distance de freinage à 90 km/h, puis à 130 km/h.

Exercice 3 – Inverse

On pose $u = \frac{1}{x}$ et l'on obtient $y = 12u + 1$. Exprimer y en fonction de x et calculer y pour $x = 4$.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $y = 10^{0,1t+2} = 100 \times (10^{0,1})^t \approx 100 \times 1,259^t$. Pour $t = 3$: $y = 10^{2,3} \approx 199,5$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. À 90 km/h : $d \approx 0,006 \times 8\,100 = 48,6$ m. À 130 km/h : $d \approx 0,006 \times 16\,900 = 101,4$ m (plus du double).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $y = \frac{12}{x} + 1$; pour $x = 4$: $y = 3 + 1 = 4$.