

Plaquette 5 – Modéliser une situation par une suite

Suites arithmétiques et géométriques – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La question à se poser en premier.

L'énoncé dit...	Suite	Relation
« augmente de 40 unités »	arithmétique	$u_{n+1} = u_n + 40$
« augmente de 4 % »	géométrique	$u_{n+1} = 1,04 u_n$
« passe de 80 à 96,8 en deux ans »	à identifier	moyenne arithmétique ou géométrique

Poser le rang correctement. Si u_0 désigne l'année de départ, alors u_n désigne l'année « départ + n ». Une phrase du type « la première année » impose souvent u_1 : il faut alors $n - 1$ écarts.

Moyennes de deux nombres. Le terme du milieu de trois termes consécutifs est la **moyenne arithmétique** des deux autres pour une suite arithmétique (croissance linéaire), leur **moyenne géométrique** pour une suite géométrique à termes positifs (croissance exponentielle) :

$$b = \frac{a + c}{2} \quad \text{ou} \quad b = \sqrt{a \times c}$$

Les trois questions types.

1. Calculer un terme : formule explicite ou tableur.
2. Cumuler : formule de somme.
3. Chercher un seuil : boucle *tant que*, ou essais encadrants.

Le contrôle de vraisemblance. Un effectif s'arrondit, un volume ne dépasse pas la capacité de la cuve, une population ne devient pas négative. Toujours confronter le résultat au bon sens physique.

⚠ Une modélisation vaut sur un **domaine limité** : une croissance de 8 % par an ne se prolonge pas sur cinquante ans sans devenir absurde.

Correction de l'exercice 1 – Choisir le bon modèle

a) Le coût cumulé augmente de 25 € chaque mois et part de 0, puisqu'il n'y a pas de frais d'entrée : suite **arithmétique** de raison 25, $u_n = 25n$.

b) Une hausse de 1,8 % revient à multiplier par 1,018 chaque année : suite **géométrique** de raison 1,018,

$$v_n = 4\,000 \times 1,018^n$$

c) Le réservoir perd le même volume chaque jour : suite **arithmétique** de raison -20, $w_n = 600 - 20n$.

Ce dernier modèle n'est valable que jusqu'à $n = 30$, jour où le réservoir est vide ($600 - 20 \times 30 = 0$).

Réponse. a) arithmétique, $u_n = 25n$ · b) géométrique, $v_n = 4\,000 \times 1,018^n$ · c) arithmétique, $w_n = 600 - 20n$.

Correction de l'exercice 2 - Deux amortissements

Amortissement linéaire. La machine perd chaque année le même montant, 3 000 € : sa valeur forme une suite arithmétique, $u_n = 30\,000 - 3\,000n$. Au bout de 4 ans, $u_4 = 30\,000 - 12\,000 = 18\,000$ €.

Amortissement dégressif. Perdre 20 % de sa valeur revient à la multiplier par 0,8 : suite géométrique, $v_n = 30\,000 \times 0,8^n$.

$$v_4 = 30\,000 \times 0,8^4 = 30\,000 \times 0,4096 = 12\,288 \text{ €}$$

Le dégressif donne une valeur plus basse de 5 712 € : il fait peser la perte sur les premières années. Au bout de 10 ans, en revanche, la machine vaut 0 € en linéaire et encore environ 3 221 € en dégressif. Réponses : 18 000 € et 12 288 €.

Réponse. 18 000 € en linéaire, 12 288 € en dégressif.

Correction de l'exercice 3 - Une population

a) Une baisse de 0,9 % revient à multiplier par $1 - 0,009 = 0,991$: la population forme une suite géométrique, $u_n = 12\,500 \times 0,991^n$.

b) Dans 8 ans, $u_8 = 12\,500 \times 0,991^8 \approx 11\,628$ habitants.

c) On cherche le premier n tel que

$$12\,500 \times 0,991^n < 11\,000 \Leftrightarrow 0,991^n < 0,88$$

Pour $n = 14$, la population vaut environ 11 014, encore au-dessus ; pour $n = 15$, environ 10 915. Elle passe sous 11 000 habitants au bout de 15 **ans**, à condition que le taux de baisse reste constant pendant toute cette durée.

Réponse. a) $u_n = 12\,500 \times 0,991^n$ · b) environ 11 628 habitants · c) au bout de 15 ans.

Correction de l'exercice 4 - Un coût qui s'ajoute

a) Au coût fixe de 180 € s'ajoutent 45 € par jour : le coût forme une suite arithmétique de premier terme $c_0 = 180$ et de raison 45, d'où $c_n = 180 + 45n$.

b) On cherche le plus grand nombre de jours qui respecte le budget :

$$180 + 45n \leq 1\,000 \Leftrightarrow 45n \leq 820 \Leftrightarrow n \leq 18,2\dots$$

Le plus grand entier possible est $n = 18$. **Contrôle** : $c_{18} = 180 + 810 = 990$ €, dans le budget, alors que $c_{19} = 1\,035$ € le dépasse. Réponse : 18 **jours**, pour 990 €.

Réponse. a) $c_n = 180 + 45n$ · b) 18 jours (coût 990 €).

Correction de l'exercice 5 - Taux moyen et moyenne géométrique

a) Le coefficient multiplicateur global vaut $\frac{48\,400}{40\,000} = 1,21$: le chiffre d'affaires a augmenté de 21 %.

b) Avec un taux annuel constant t , on multiplie deux fois par $1 + t$, donc $(1 + t)^2 = 1,21$. Comme $1 + t$ est positif :

$$1 + t = \sqrt{1,21} = 1,1$$

Le taux annuel moyen vaut +10 %, et non $\frac{21}{2} = 10,5$ % : une hausse de 10,5 % deux années de suite donnerait $1,105^2 \approx 1,221$, soit +22,1 %.

c) Dans ce modèle, l'année intermédiaire vaut $40\,000 \times 1,1 = 44\,000$ €. La moyenne géométrique des deux valeurs extrêmes vaut

$\sqrt{40\,000 \times 48\,400} = \sqrt{1\,936\,000\,000} = 44\,000$: on retrouve bien le terme du milieu d'une

suite géométrique.

Réponse. a) $+21\%$ · b) $+10\%$ par an · c) $\sqrt{40\,000 \times 48\,400} = 44\,000$ €.

Correction de l'exercice 6 – Moyenne arithmétique ou géométrique ?

a) Une croissance linéaire correspond à une suite arithmétique : le terme du milieu est la **moyenne arithmétique** des deux autres,

$$\frac{80 + 96,8}{2} = 88,4 \text{ €}$$

b) Une croissance exponentielle correspond à une suite **géométrique** : le terme du milieu est la **moyenne géométrique** des deux autres, $\sqrt{80 \times 96,8} = \sqrt{7\,744} = 88$ €.

c) La valeur réelle, 88 €, correspond au modèle **exponentiel**. Sa raison vaut $\frac{88}{80} = 1,1$, soit $+10\%$ par an ; on vérifie que $88 \times 1,1 = 96,8$. En 2027, deux ans après 2025 : $96,8 \times 1,1^2 = 96,8 \times 1,21 \approx 117,13$ €.

Les deux moyennes sont proches ici car la hausse est faible ; la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.

Réponse. a) 88,40 € · b) 88 € · c) le modèle exponentiel ($+10\%$ par an) ; environ 117,13 €.

Correction de l'exercice 7 – Comparer deux contrats

Le salaire du contrat A augmente d'un montant fixe ($A_n = 28\,000 + 900n$), celui du contrat B d'un pourcentage ($B_n = 26\,000 \times 1,04^n$). La première année correspond à $n = 0$ et la dixième à $n = 9$.

Première année. A offre 28 000 € et B 26 000 € : A est plus avantageux, de 2 000 €.

Dixième année. $A_9 = 28\,000 + 8\,100 = 36\,100$ €, alors que

$$B_9 = 26\,000 \times 1,04^9 \approx 26\,000 \times 1,423312 \approx 37\,006 \text{ €}$$

B est devenu plus avantageux, d'environ 906 €. En fait, B passe devant dès la neuvième année : $A_8 = 35\,200$ € contre $B_8 \approx 35\,583$ €. Réponses : **A** la première année, **B** la dixième.

Réponse. A la première année (28 000 € contre 26 000 €), B la dixième (environ 37 006 € contre 36 100 €).

Correction de l'exercice 8 – Modéliser un rang décalé

a) La première année correspond à $u_1 = 2\,400$. Pour atteindre l'année n , on applique $n - 1$ hausses de 8% , c'est-à-dire $n - 1$ multiplications par $1,08$:

$$u_n = 2\,400 \times 1,08^{n-1}$$

Contrôle : $u_1 = 2\,400 \times 1,08^0 = 2\,400$.

b) Pour la sixième année, l'exposant vaut $6 - 1 = 5$:

$$u_6 = 2\,400 \times 1,08^5 \approx 2\,400 \times 1,469328 \approx 3\,526 \text{ pièces.}$$

Prendre l'exposant 6 donnerait environ 3 808 pièces, à tort : on compte les hausses, pas les années. Réponse : environ 3 526 **pièces**.

Réponse. a) $u_n = 2\,400 \times 1,08^{n-1}$ · b) environ 3 526 pièces.

Correction de l'exercice 9 - Cumul et seuil

- a) Une perte de 1 % par an revient à multiplier par 0,99. La première année correspond à $u_1 = 1\,800$, donc $u_n = 1\,800 \times 0,99^{n-1}$. La dixième année, l'exposant vaut 9 : $u_{10} = 1\,800 \times 0,99^9 \approx 1\,644$ kWh, soit environ 8,6 % de moins que la première année.
- b) La production cumulée est la somme de 10 termes d'une suite géométrique de raison 0,99 :

$$1\,800 \times \frac{1 - 0,99^{10}}{1 - 0,99} \approx 1\,800 \times \frac{0,095618}{0,01} \approx 17\,211 \text{ kWh}$$

Sans perte de rendement, le panneau aurait produit 18 000 kWh : la perte cumulée est d'environ 789 kWh, soit 4,4 %. Réponses : environ 1 644 **kWh** et 17 211 **kWh**.

Réponse. a) environ 1 644 kWh · b) environ 17 211 kWh.

Correction de l'exercice 10 - Un modèle qui devient absurde

- a) En 10 heures, soit 600 minutes, il y a $\frac{600}{20} = 30$ doublements. Le nombre de bactéries forme une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, donc

$$u_{30} = 2^{30} \approx 1,07 \times 10^9$$

On dépasse le milliard de bactéries.

- b) En 2 jours, soit 48 heures, il y a $48 \times 3 = 144$ doublements : $2^{144} \approx 2,2 \times 10^{43}$ bactéries. Leur masse dépasserait de très loin celle de la Terre : le modèle est **absurde** à cette échelle.

Les nutriments et la place étant limités, la croissance finit par plafonner. Le modèle géométrique ne vaut que pendant quelques heures, tant que le milieu n'est pas saturé : toute modélisation a un domaine de validité.

Réponse. a) environ 1,07 milliard · b) environ $2,2 \times 10^{43}$, physiquement impossible : le modèle ne vaut que quelques heures.

Correction de l'exercice 11 - Un loyer indexé

- a) La première année, le loyer annuel vaut $12 \times 650 = 7\,800$ €. Augmenter de 2 % revient à multiplier par 1,02 : les loyers annuels forment une suite géométrique de premier terme 7 800 et de raison 1,02. La sixième année, on a appliqué 5 hausses : $7\,800 \times 1,02^5 \approx 8\,611,83$ €.
- b) La somme payée est la somme des 6 premiers termes :

$$7\,800 \times \frac{1 - 1,02^6}{1 - 1,02} \approx 7\,800 \times 6,308121 \approx 49\,203 \text{ €}$$

- c) Avec un loyer fixe, on aurait payé $6 \times 7\,800 = 46\,800$ €. L'indexation coûte donc environ $49\,203 - 46\,800 = 2\,403$ € sur six ans.

Réponse. a) 7 800 € puis environ 8 611,83 € · b) environ 49 203 € · c) 46 800 € : l'indexation coûte environ 2 403 €.

Correction de l'exercice 12 - Comparer trois modèles

- a) **Modèle A.** On ajoute 400 unités par an, suite arithmétique : $5\,000 + 5 \times 400 = 7\,000$ unités.

Modèle B. On multiplie par 1,07 chaque année, suite géométrique : $5\,000 \times 1,07^5 \approx 5\,000 \times 1,402552 \approx 7\,013$ unités.

Modèle C. On multiplie par 1,05 chaque année : $5\,000 \times 1,05^5 \approx 6\,381$ unités.

À 5 ans, A et B sont presque à égalité, C est nettement en dessous.

b) Au bout de 10 ans :

$$5\,000 + 10 \times 400 = 9\,000 \quad 5\,000 \times 1,07^{10} \approx 9\,836$$

B passe nettement devant : sa croissance est exponentielle, son gain annuel augmente chaque année, alors que celui de A reste de 400 unités.

Réponse. a) A : 7 000 · B : environ 7 013 · C : environ 6 381 unités · b) B (environ 9 836 contre 9 000).

Correction de l'exercice 13 - Un objectif à atteindre

La production doit être multipliée par $\frac{25\,000}{18\,000} \approx 1,38889$ en 5 ans. Avec un taux annuel constant t , on multiplie cinq fois par $1 + t$, donc $(1 + t)^5 = 1,38889$ et

$$1 + t = 1,38889^{\frac{1}{5}} \approx 1,0679$$

Le taux annuel vaut environ 6,8 %. **Contrôle** : $18\,000 \times 1,0679^5 \approx 25\,000$.

Avec une hausse fixe, il faudrait $\frac{7\,000}{5} = 1\,400$ unités de plus chaque année ; la hausse en pourcentage démarre plus doucement et accélère ensuite. Réponse : environ +6,8 % **par an**.

Réponse. Environ +6,8 % par an.

Correction de l'exercice 14 - Un modèle à valider

Une croissance de 6 % par an correspond à une suite géométrique de raison 1,06 : on teste donc les quotients successifs.

$$\frac{848}{800} = 1,06 \quad \frac{899}{848} \approx 1,0601 \quad \frac{953}{899} \approx 1,0601$$

Les trois quotients valent 1,06 aux arrondis près : le modèle convient. **Contrôle** : $800 \times 1,06^3 \approx 952,8$, très proche de 953.

Les différences, 48, 51 et 54, ne sont pas constantes : la croissance n'est pas arithmétique. Le modèle prévoit $u_5 \approx 800 \times 1,06^4 \approx 1\,010$. Réponse : **oui**, les valeurs sont compatibles.

Réponse. Oui : les quotients valent tous environ 1,06.

Correction de l'exercice 15 - Cumul et objectif

La production mensuelle est géométrique de raison 1,05 et de premier terme 3 000. Le cumul sur n mois vaut

$$3\,000 \times \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} = 60\,000 \times (1,05^n - 1)$$

La commande est honorée lorsque ce cumul atteint 50 000, c'est-à-dire lorsque $1,05^n \geq 1,8333$. Pour $n = 12$, $1,05^{12} \approx 1,7959$: le cumul vaut environ 47 751 pièces, c'est insuffisant. Pour $n = 13$, $1,05^{13} \approx 1,8856$: le cumul vaut environ 53 139 pièces.

Contrôle : le treizième mois produit $3\,000 \times 1,05^{12} \approx 5\,388$ pièces, et $47\,751 + 5\,388 = 53\,139$. Réponse : au bout de 13 **mois**.

Réponse. Au bout de 13 mois.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : renouveler une flotte de véhicules

a) Le nombre de véhicules achetés augmente de 2 chaque année : suite arithmétique de raison 2, avec $a_1 = 8$. La sixième année, $a_6 = 8 + 5 \times 2 = 18$ véhicules. Sur six ans, la somme vaut le nombre d'années fois la moyenne des extrêmes :

$$6 \times \frac{8+18}{2} = 6 \times 13 = 78 \text{ véhicules}$$

b) Augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03 : les prix forment une suite géométrique, $p_n = 22\,000 \times 1,03^{n-1}$. La sixième année, $p_6 = 22\,000 \times 1,03^5 \approx 25\,504$ €.

c) On cherche le premier n tel que $22\,000 \times 1,03^{n-1} > 26\,000$. On a $p_6 \approx 25\,504$ €, encore en dessous, et $p_7 = 22\,000 \times 1,03^6 \approx 26\,269$ €. La suite étant croissante, le prix dépasse 26 000 € à partir de la **septième année**.

d) En remplaçant k par 1, 2, ..., 6 dans $6 + 2k$, on obtient $8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 78$. Le terme $6 + 2k$ est le nombre de véhicules achetés l'année k : la somme est le **nombre total de véhicules** achetés en six ans, déjà calculé en a).

Réponse. a) 18 véhicules ; 78 au total · b) environ 25 504 € · c) la septième année · d) $8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 78$: le nombre total de véhicules achetés en six ans.