

Plaquette 2 – Reconnaître une suite et calculer ses termes

Suites arithmétiques et géométriques — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Reconnaître la nature d'une suite.

On passe d'un terme au suivant en...	Nature	Relation	Terme général
ajoutant toujours le même nombre r	arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_n = u_0 + nr$
multipliant toujours par le même nombre q	géométrique	$u_{n+1} = q u_n$	$u_n = u_0 \times q^n$

Le test.

- Calculer les **différences** $u_1 - u_0, u_2 - u_1 \dots$: si elles sont égales, c'est arithmétique.
- Sinon, calculer les **quotients** $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1} \dots$: s'ils sont égaux, c'est géométrique.
- Si ni l'un ni l'autre, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

À partir d'un rang quelconque.

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{et} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Deux termes connus. Pour retrouver la raison :

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p} \quad \text{et} \quad q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$$

Le lien avec les évolutions. Une hausse de $t\%$ par période donne une suite **géométrique** de raison $q = 1 + t$; une hausse d'un montant fixe donne une suite **arithmétique**.

⚠ Attention au rang de départ : avec u_0 , le terme u_{10} est le **onzième** terme, et l'exposant est bien 10.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître deux suites

Pour la suite u . On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** 4 : la suite est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 7$, donc $u_n = 7 + 4n$.

Pour la suite v . On passe d'un terme au suivant en **multipliant** par 0,9 : la suite est géométrique de raison $q = 0,9$, d'où

$$v_n = 200 \times 0,9^n$$

Multiplier par 0,9 revient à baisser de 10 % à chaque étape. Réponses : u est **arithmétique de raison 4**, v est **géométrique de raison 0,9**.

Réponse. u est arithmétique de raison 4, v est géométrique de raison 0,9.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître à partir d'un tableau

Pour savoir si la suite est arithmétique, on calcule les différences entre deux termes consécutifs : $12 - 5 = 7$, $19 - 12 = 7$ et $26 - 19 = 7$. Elles sont toutes égales, donc on passe d'un terme au suivant en ajoutant 7 : la suite est arithmétique de raison 7 et de premier terme $u_0 = 5$.

$$u_n = 5 + 7n$$

Contrôle : $u_3 = 5 + 21 = 26$. Les quotients $\frac{12}{5} = 2,4$ et $\frac{19}{12} \approx 1,58$ ne sont pas égaux : la suite n'est pas géométrique. Réponse : **arithmétique de raison 7**.

Réponse. Arithmétique de raison 7, avec $u_n = 5 + 7n$.

Correction de l'exercice 3 - Un autre tableau

On teste d'abord les différences : $12 - 3 = 9$ puis $48 - 12 = 36$. Elles ne sont pas égales, donc la suite n'est pas arithmétique.

On teste ensuite les quotients : $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{48}{12} = 4$ et $\frac{192}{48} = 4$. On passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par 4 : la suite est géométrique de raison 4, de premier terme 3.

$$u_n = 3 \times 4^n$$

Contrôle : $u_3 = 3 \times 64 = 192$. Réponse : **géométrique de raison 4**.

Réponse. Géométrique de raison 4, avec $u_n = 3 \times 4^n$.

Correction de l'exercice 4 - Ni l'une ni l'autre

Les différences successives valent $5 - 2 = 3$, $10 - 5 = 5$ et $17 - 10 = 7$: elles ne sont pas constantes, donc la suite n'est **pas arithmétique**.

Les quotients valent $\frac{5}{2} = 2,5$, $\frac{10}{5} = 2$ et $\frac{17}{10} = 1,7$: ils ne sont pas constants non plus, donc la suite n'est **pas géométrique**.

Les termes s'écrivent $1^2 + 1$, $2^2 + 1$, $3^2 + 1$, $4^2 + 1$: en numérotant à partir de $u_1 = 2$, on a $u_n = n^2 + 1$. Les différences 3, 5, 7 forment d'ailleurs elles-mêmes une suite arithmétique. Conclusion : la suite n'est **ni arithmétique ni géométrique**.

Réponse. Les différences (3, 5, 7) et les quotients (2,5 ; 2 ; 1,7) ne sont pas constants.

Correction de l'exercice 5 - Calculer des termes arithmétiques

La suite est arithmétique : on utilise la formule explicite $u_n = u_0 + nr$, ici $u_n = 120 - 7n$.

$$- u_5 = 120 + 5 \times (-7) = 120 - 35 = 85.$$

$$- u_{20} = 120 - 140 = -20.$$

Pour trouver le premier terme négatif, on résout

$$120 - 7n < 0 \Leftrightarrow 7n > 120 \Leftrightarrow n > 17,14\dots$$

Le premier entier qui convient est $n = 18$. **Contrôle :** $u_{17} = 120 - 119 = 1$ est encore positif et $u_{18} = 120 - 126 = -6$. Réponses : $u_5 = 85$, $u_{20} = -20$, premier terme négatif $u_{18} = -6$.

Réponse. $u_5 = 85$, $u_{20} = -20$, premier terme négatif $u_{18} = -6$.

Correction de l'exercice 6 - Calculer des termes géométriques

La suite est géométrique, donc $v_n = v_0 \times q^n = 5\,000 \times 1,04^n$.

$$v_3 = 5\,000 \times 1,04^3 \approx 5\,000 \times 1,124864 \approx 5\,624$$

De même, $1,04^{10} \approx 1,480244$, d'où $v_{10} \approx 7\,401$.

Multiplier par 1,04 traduit une hausse de 4 % par an. En dix ans, la hausse totale est d'environ 48 %, plus que $10 \times 4 = 40$ % : chaque hausse porte sur une valeur déjà augmentée. Réponses : $v_3 \approx 5\,624$ et $v_{10} \approx 7\,401$.

Réponse. $v_3 \approx 5\,624$ et $v_{10} \approx 7\,401$.

Correction de l'exercice 7 - Deux termes connus, cas arithmétique

Entre u_3 et u_9 , on ajoute six fois la raison : $u_9 = u_3 + 6r$. On en déduit

$$r = \frac{u_9 - u_3}{9 - 3} = \frac{47 - 17}{6} = 5$$

Pour revenir à u_0 , on écrit $u_3 = u_0 + 3r$, soit $17 = u_0 + 15$, donc $u_0 = 2$. La formule explicite est $u_n = 2 + 5n$.

Contrôle : $u_9 = 2 + 45 = 47$. Réponses : $r = 5$ et $u_0 = 2$.

Réponse. $r = 5$ et $u_0 = 2$, donc $u_n = 2 + 5n$.

Correction de l'exercice 8 - Deux termes connus, cas géométrique

Entre v_2 et v_5 , on multiplie trois fois par la raison : $v_5 = v_2 \times q^3$. Donc

$$q^3 = \frac{2430}{90} = 27$$

Le seul nombre dont le cube vaut 27 est $q = 3$; les termes étant positifs, la raison l'est aussi. On revient ensuite à v_0 : $v_2 = v_0 \times q^2$, soit $90 = 9v_0$, donc $v_0 = 10$ et $v_n = 10 \times 3^n$.

Contrôle : $v_5 = 10 \times 243 = 2430$. Réponses : $q = 3$ et $v_0 = 10$.

Réponse. $q = 3$ et $v_0 = 10$, donc $v_n = 10 \times 3^n$.

Correction de l'exercice 9 - D'une évolution à une suite

a) Une hausse de 6 % revient à multiplier par $1 + 0,06 = 1,06$. Chaque année, la production est donc multipliée par le même nombre : la suite est géométrique de raison 1,06 et de premier terme $u_0 = 3\,200$.

$$u_{n+1} = 1,06 u_n \quad u_n = 3\,200 \times 1,06^n$$

b) Dans 5 ans, $u_5 = 3\,200 \times 1,06^5 \approx 3\,200 \times 1,338226 \approx 4\,282$ pièces, soit une hausse totale d'environ 33,8 %.

Une suite arithmétique de raison 192 (six pour cent de 3 200 ajoutés chaque année) donnerait seulement 4 160 pièces : elle oublie que chaque hausse porte sur une production déjà augmentée. Réponse : environ 4 282 **pièces**.

Réponse. a) $u_{n+1} = 1,06 u_n$ et $u_n = 3\,200 \times 1,06^n$ · b) environ 4 282 pièces.

Correction de l'exercice 10 - Une hausse fixe

a) La production augmente chaque mois du **même nombre** de pièces : la suite est arithmétique de raison 25. Le premier mois correspond à $u_1 = 450$; entre le mois 1 et le mois n , il y a $n - 1$ hausses, donc

$$u_n = 450 + 25(n - 1) = 425 + 25n$$

b) Pour le douzième mois, $u_{12} = 425 + 300 = 725$ pièces.

Contrôle : entre le mois 1 et le mois 12, il y a 11 hausses, et $450 + 11 \times 25 = 725$. Compter 12 hausses donnerait 750, à tort. Réponse : 725 **pièces**.

Réponse. a) $u_n = 425 + 25n$ · b) 725 pièces.

Correction de l'exercice 11 - Repérer la bonne modélisation

Le critère est simple : une variation d'un **montant fixe** donne une suite arithmétique, une variation d'un **pourcentage** donne une suite géométrique.

- a) Le stock baisse de 40 pièces chaque jour : suite **arithmétique** de raison -40 .
 b) Une hausse de 2,5 % revient à multiplier par 1,025 : suite **géométrique** de raison 1,025.
 c) Avec les intérêts composés, les intérêts portent sur le capital déjà acquis : on multiplie chaque année par $1 + t$, la suite est **géométrique**.
 d) Le salaire augmente de 60 € chaque année : suite **arithmétique** de raison 60.

Remarque : des intérêts **simples**, calculés toujours sur le capital initial, donneraient une suite arithmétique.

Réponse. a) arithmétique · b) géométrique · c) géométrique · d) arithmétique.

Correction de l'exercice 12 - Une suite décroissante

- a) Une baisse de 15 % revient à multiplier par $1 - 0,15 = 0,85$. La suite est géométrique de raison 0,85 :

$$u_n = 8\,000 \times 0,85^n$$

- b) Après 4 mois, $u_4 = 8\,000 \times 0,85^4 \approx 8\,000 \times 0,522006 \approx 4\,176$ pièces.

La baisse totale est d'environ 47,8 %, moins que $4 \times 15 = 60$ % : chaque baisse porte sur un stock déjà réduit. Après 10 mois, il resterait environ 1 575 pièces ; les termes se rapprochent de 0 sans l'atteindre. Réponse : environ 4 176 **pièces**.

Réponse. a) $u_n = 8\,000 \times 0,85^n$ · b) environ 4 176 pièces.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux suites

On utilise les deux formules explicites : $u_n = 1\,000 + 80n$ et $v_n = 1\,000 \times 1,06^n$.

Au rang 5. $u_5 = 1\,000 + 400 = 1\,400$ et $v_5 = 1\,000 \times 1,06^5 \approx 1\,338$: la suite arithmétique est devant.

Au rang 20. $u_{20} = 1\,000 + 1\,600 = 2\,600$, alors que

$$v_{20} = 1\,000 \times 1,06^{20} \approx 1\,000 \times 3,2071 \approx 3\,207$$

La suite géométrique est passée devant. Le croisement a lieu entre les rangs 10 et 11 : $u_{10} = 1\,800 > v_{10} \approx 1\,791$, puis $u_{11} = 1\,880 < v_{11} \approx 1\,898$. Une croissance en pourcentage part moins vite mais finit toujours par dépasser une croissance fixe. Réponses : $u_5 > v_5$ et $u_{20} < v_{20}$.

Réponse. $u_5 = 1\,400 > v_5 \approx 1\,338$, mais $u_{20} = 2\,600 < v_{20} \approx 3\,207$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un rang

On cherche n tel que $u_n = 208$:

$$12 + 7n = 208 \Leftrightarrow 7n = 196 \Leftrightarrow n = 28$$

Le résultat est un entier naturel, donc 208 est bien un terme de la suite. **Contrôle** : $12 + 7 \times 28 = 12 + 196 = 208$.

Il faut toujours faire cette vérification : pour 200, on trouverait $7n = 188$, soit $n \approx 26,86$, qui n'est pas entier. Comme $u_{26} = 194$ et $u_{27} = 201$, le nombre 200 n'est pas un terme de la suite. Réponse : $n = 28$.

Réponse. $n = 28$.

Correction de l'exercice 15 - Trois termes consécutifs

Trois nombres a , b , c sont des termes consécutifs d'une suite **arithmétique** si l'on ajoute

le même nombre pour passer de l'un au suivant, c'est-à-dire si $b - a = c - b$. Ils le sont d'une suite **géométrique** si l'on multiplie par le même nombre, c'est-à-dire si $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

a) $18 - 12 = 6$ et $27 - 18 = 9$: pas arithmétique. En revanche $\frac{18}{12} = 1,5$ et $\frac{27}{18} = 1,5$: les nombres sont des termes consécutifs d'une suite **géométrique** de raison 1,5. Le terme du milieu est la moyenne géométrique des deux autres :

$$\sqrt{12 \times 27} = \sqrt{324} = 18$$

b) $11,5 - 7 = 4,5$ et $16 - 11,5 = 4,5$: suite **arithmétique** de raison 4,5. Le terme du milieu est la moyenne arithmétique $\frac{7+16}{2} = 11,5$.

c) Les différences valent 10 et 20,5, les quotients 2 et 2,025 : **ni l'une ni l'autre**, même si le résultat est proche d'une suite géométrique de raison 2.

Réponse. a) géométrique de raison 1,5 · b) arithmétique de raison 4,5 · c) ni l'une ni l'autre.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux offres de placement

a) L'offre A ajoute chaque année un **montant fixe** de 600 € : suite arithmétique, $a_n = 12\,000 + 600n$. L'offre B ajoute un **pourcentage** : suite géométrique de raison 1,04, $b_n = 12\,000 \times 1,04^n$.

b) Au bout de 5 ans, $a_5 = 12\,000 + 3\,000 = 15\,000$ € et $b_5 = 12\,000 \times 1,04^5 \approx 14\,600$ € : A est en avance d'environ 400 €.

c) Au bout de 15 ans, $a_{15} = 21\,000$ € et

$$b_{15} = 12\,000 \times 1,04^{15} \approx 12\,000 \times 1,800944 \approx 21\,611 \text{ €}$$

B est passée devant, d'environ 611 €.

d) On cherche le croisement en calculant quelques termes : $a_{11} = 18\,600$ € et $b_{11} \approx 18\,473$ € (A devant), puis $a_{12} = 19\,200$ € et $b_{12} \approx 19\,212$ € (B devant).

B dépasse donc A à partir de la **douzième année**. Au bout de 25 ans, l'écart atteint près de 5 000 € (27 000 € contre environ 31 990 €).

Réponse. a) $a_n = 12\,000 + 600n$ et $b_n = 12\,000 \times 1,04^n$ · b) 15 000 € contre environ 14 600 € · c) 21 000 € contre environ 21 611 € · d) à partir de la 12^e année.