

Plaquette 3 – Sommes de termes et notation sigma

Suites arithmétiques et géométriques – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Compter les termes. De u_p à u_n , il y a

$$n - p + 1 \text{ termes}$$

De u_0 à u_n , il y a donc $n + 1$ termes.

Somme d'une suite arithmétique.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

En clair : **nombre de termes** $\times$ **moyenne du premier et du dernier**.

Somme d'une suite géométrique (avec $q \neq 1$) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cas particuliers à connaître.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Notation sigma. $\sum_{k=0}^n u_k$ désigne $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

— L'indice k est **muet** : le changer ne change rien.

— Le nombre de termes est (borne haute) – (borne basse) + 1.

Somme partielle. Pour aller de u_p à u_n : on calcule la somme depuis le début, puis on retire ce qui précède.

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{p-1} u_k$$

⚠ Dans la formule géométrique, l'exposant est $n + 1$, pas n : c'est le **nombre de termes**, pas le dernier rang.

Correction de l'exercice 1 – Compter les termes

De u_p à u_q , il y a $q - p + 1$ termes : on compte les deux extrémités.

— De u_0 à u_{12} : $12 - 0 + 1 = 13$ termes. Répondre 12 oublierait u_0 .

— De u_5 à u_{20} : $20 - 5 + 1 = 16$ termes.

Contrôle sur un petit cas qu'on peut compter sur les doigts : de u_1 à u_3 , il y a bien $3 - 1 + 1 = 3$ termes. Réponses : 13 **termes**, puis 16 **termes**.

Réponse. 13 termes, puis 16 termes.

Correction de l'exercice 2 – Somme des premiers entiers

On applique la formule du cours avec $n = 60$:

$$1 + 2 + \cdots + 60 = \frac{60 \times 61}{2} = \frac{3\,660}{2} = 1\,830$$

Contrôle par la méthode de Gauss : on regroupe $1 + 60, 2 + 59, 3 + 58 \dots$ Chaque paire vaut 61 et il y a 30 paires, d'où $30 \times 61 = 1\,830$. Réponse : 1 830.

Réponse. 1 830.

Correction de l'exercice 3 - Somme arithmétique simple

La somme d'une suite arithmétique vaut le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme. On calcule donc d'abord le dernier terme, $u_{20} = 8 + 20 \times 5 = 108$, puis le nombre de termes, $20 - 0 + 1 = 21$.

$$u_0 + \dots + u_{20} = 21 \times \frac{8 + 108}{2} = 21 \times 58 = 1\,218$$

Contrôle d'ordre de grandeur : $21 \times 58 \approx 20 \times 60 = 1\,200$. Réponse : 1 218.

Réponse. 1 218.

Correction de l'exercice 4 - Somme partielle arithmétique

On applique la même formule, mais la somme commence au rang 10. Le premier terme est $u_{10} = 8 + 50 = 58$, le dernier $u_{20} = 108$, et il y a $20 - 10 + 1 = 11$ termes.

$$u_{10} + \dots + u_{20} = 11 \times \frac{58 + 108}{2} = 11 \times 83 = 913$$

Contrôle par différence : la somme de u_0 à u_{20} vaut 1 218, et celle de u_0 à u_9 vaut $10 \times \frac{8 + 53}{2} = 305$. On retrouve $1\,218 - 305 = 913$. Réponse : 913.

Réponse. 913.

Correction de l'exercice 5 - Somme géométrique

La suite est géométrique de raison 1,5 et la somme compte 7 termes. La formule du cours donne

$$v_0 + \dots + v_6 = 100 \times \frac{1 - 1,5^7}{1 - 1,5}$$

Avec $1,5^7 \approx 17,0859$, le numérateur vaut $-16,0859$ et le dénominateur $-0,5$: les deux signes « moins » se simplifient et le quotient vaut 32,1719. La somme vaut donc environ 3 217,2.

Contrôle par addition directe :

$100 + 150 + 225 + 337,5 + 506,25 + 759,375 + 1\,139,06 \approx 3\,217,2$. Réponse : environ 3 217,2.

Réponse. Environ 3 217,2.

Correction de l'exercice 6 - Une raison inférieure à 1

La somme compte 10 termes (de w_0 à w_9) d'une suite géométrique de raison 0,75 :

$$w_0 + \dots + w_9 = 800 \times \frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75}$$

Comme $0,75^{10} \approx 0,0563$, le quotient vaut $\frac{0,9437}{0,25} \approx 3,7749$ et la somme environ $800 \times 3,7749 \approx 3\,020$.

Les termes deviennent très petits : la somme s'approche de $\frac{800}{0,25} = 3\,200$ sans jamais l'atteindre. Réponse : environ 3 020.

Réponse. Environ 3 020.

Correction de l'exercice 7 - Somme des puissances

Chaque terme est le double du précédent : c'est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Le dernier terme est $512 = 2^9$, donc on additionne les puissances de 2 de 2^0 à 2^9 , soit 10 termes.

$$1 + 2 + \dots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1\,024}{-1} = 1\,023$$

La somme vaut $2^{10} - 1$: c'est toujours la puissance suivante moins 1. Réponse : 1 023.

Réponse. 1 023.

Correction de l'exercice 8 - Lire une notation sigma

L'indice k prend les valeurs entières de 1 à 5 ; on remplace k par chacune d'elles dans $2k + 1$:

$$\sum_{k=1}^5 (2k + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$$

Contrôle : les termes forment une suite arithmétique de raison 2, avec 5 termes. La formule donne $5 \times \frac{3 + 11}{2} = 5 \times 7 = 35$. Réponse : 35.

Réponse. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$.

Correction de l'exercice 9 - Écrire avec sigma

Première somme. On additionne les termes de u_3 à u_{15} : l'indice va de 3 à 15, d'où l'écriture $\sum_{k=3}^{15} u_k$, qui compte $15 - 3 + 1 = 13$ termes.

Seconde somme. Les termes sont les puissances de 3, de $3^0 = 1$ à 3^{10} : l'indice va de 0 à 10, soit 11 termes. Avec la formule des sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{10} 3^k = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \frac{177\,147 - 1}{2} = 88\,573$$

Réponses : $\sum_{k=3}^{15} u_k$ et $\sum_{k=0}^{10} 3^k = 88\,573$.

Réponse. $\sum_{k=3}^{15} u_k$ et $\sum_{k=0}^{10} 3^k = 88\,573$.

Correction de l'exercice 10 - Deux sommes sigma

Première somme. Le terme 4 ne dépend pas de k : on additionne 10 fois le nombre 4 (de $k = 0$ à $k = 9$). La somme vaut $10 \times 4 = 40$.

Seconde somme. C'est la somme des dix premiers entiers :

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

Contrôle par appariement : $1 + 10, 2 + 9 \dots$ forment cinq paires valant 11, soit 55.

Réponses : 40 et 55.

Réponse. 40 et 55.

Correction de l'exercice 11 - Production cumulée

La production augmente chaque mois de 40 pièces : c'est une suite arithmétique de raison 40, avec $u_1 = 600$. Le douzième mois, elle vaut $u_{12} = 600 + 11 \times 40 = 1\,040$ pièces.

La production cumulée est la somme des 12 premiers termes, soit le nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrêmes :

$$12 \times \frac{600 + 1\,040}{2} = 12 \times 820 = 9\,840 \text{ pièces}$$

La production moyenne mensuelle vaut donc 820 pièces, la moyenne du premier et du dernier mois, ce qui est propre aux suites arithmétiques. Réponse : 9 840 **pièces**.

Réponse. 9 840 pièces.

Correction de l'exercice 12 - Cumul d'une croissance en pourcentage

Une hausse de 8 % par an revient à multiplier chaque année par 1,08 : les ventes forment une suite géométrique de premier terme 5 000 et de raison 1,08. Sur 6 ans, on additionne 6 termes :

$$S = 5\,000 \times \frac{1 - 1,08^6}{1 - 1,08} \approx 5\,000 \times \frac{-0,586874}{-0,08} \approx 5\,000 \times 7,3359$$

Le total vaut environ 36 680 unités.

Contrôle : c'est plus que $6 \times 5\,000 = 30\,000$, ce qui est normal puisque les ventes augmentent. La sixième année, elles atteignent $5\,000 \times 1,08^5 \approx 7\,347$ unités. Réponse : environ 36 680 **unités**.

Réponse. Environ 36 680 unités.

Correction de l'exercice 13 - Deux formules à ne pas confondre

Les quotients successifs valent $\frac{110}{100} = \frac{121}{110} = 1,1$: la suite est **géométrique**, pas arithmétique. L'élève a calculé le dernier terme $100 \times 1,1^6 \approx 177,16$, puis $7 \times \frac{100 + 177,16}{2} \approx 970$. Or la moyenne des termes extrêmes ne donne la somme que pour une suite arithmétique.

Le bon calcul utilise la formule des sommes géométriques :

$$100 \times \frac{1 - 1,1^7}{1 - 1,1} \approx 100 \times \frac{-0,948717}{-0,1} \approx 948,7$$

L'erreur est d'environ 21. Avant de choisir une formule, il faut toujours tester la nature de la suite. Réponse : environ 948,7.

Réponse. La suite est géométrique : la somme vaut environ 948,7, et non 970.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un nombre de termes

Notons N le nombre de termes. Le dernier terme vaut $12 + 6(N - 1) = 6N + 6$, et la somme vaut le nombre de termes fois la moyenne des extrêmes :

$$S = N \times \frac{12 + 6N + 6}{2} = N(3N + 9)$$

On cherche donc N entier tel que $3N^2 + 9N = 600$, soit $N^2 + 3N - 200 = 0$. Pour $N = 12$, le membre de gauche vaut -20 ; pour $N = 13$, il vaut 8. Comme il augmente avec N , aucun entier ne l'annule.

Concrètement, 12 termes donnent $12 \times 45 = 540$ et 13 termes donnent $13 \times 48 = 624$. La somme 600 n'est **jamais atteinte exactement** : le seuil est franchi en ajoutant le 13^e terme.

Réponse. Aucun nombre entier ne donne exactement 600 : 12 termes donnent 540, 13

en donnent 624.

Correction de l'exercice 15 - Somme des dix premiers termes

Les intérêts sont versés sur un autre compte : le capital placé reste toujours 2 000 €. Chaque année, il rapporte donc la même somme, $0,03 \times 2\,000 = 60$ €. Ce sont des intérêts **simples**, qui forment une suite constante.

$$10 \times 60 = 600 \text{ €}$$

Comparaison : si les intérêts restaient sur le compte (intérêts composés), le capital deviendrait $2\,000 \times 1,03^{10} \approx 2\,688$ €, soit environ 688 € d'intérêts. Les 88 € d'écart viennent des intérêts produits par les intérêts. Réponse : 600 €.

Réponse. 600 € d'intérêts simples (contre environ 688 € en intérêts composés).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un plan d'épargne

a) Le premier versement reste placé 10 ans ; chaque année, il est multiplié par 1,03. Il devient $1\,500 \times 1,03^{10} \approx 1\,500 \times 1,343916 \approx 2\,015,87$ €.

b) Le dernier versement, fait au début de la dixième année, ne reste placé qu'un an : $1\,500 \times 1,03 = 1\,545$ €.

c) Les dix versements deviennent $1\,500 \times 1,03^k$, pour k allant de 1 à 10. On met 1 545 en facteur pour faire apparaître une somme géométrique de 10 termes :

$$\sum_{k=1}^{10} 1\,500 \times 1,03^k = 1\,545 \times \frac{1 - 1,03^{10}}{1 - 1,03} \approx 1\,545 \times 11,4639 \approx 17\,712 \text{ €}$$

d) L'artisan a versé $10 \times 1\,500 = 15\,000$ €. Les intérêts valent donc environ $17\,712 - 15\,000 = 2\,712$ €, soit un gain d'environ 18 %.

Contrôle d'ordre de grandeur : chaque versement reste placé 5,5 ans en moyenne, ce qui donnerait $15\,000 \times 0,03 \times 5,5 \approx 2\,475$ € en intérêts simples. Le résultat est un peu supérieur, à cause de la capitalisation.

Réponse. a) environ 2 015,87 € · b) 1 545 € · c) $\sum_{k=1}^{10} 1\,500 \times 1,03^k \approx 17\,712$ € · d) 15 000 € versés, soit environ 2 712 € d'intérêts.