

Plaquette 1 - Termes, sommes et seuils

Suites arithmétiques et géométriques — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Suite **arithmétique** de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$ (ou $u_n = u_p + (n - p)r$).
- Suite **géométrique** de raison q : $u_{n+1} = q u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$).
- **Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique** :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

- **Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique** (avec $q \neq 1$) :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Cas particuliers utiles : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- **Notation** Σ : $\sum_{k=0}^n u_k$ désigne $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ (il y a $n + 1$ termes).
- Variations : arithmétique croissante si $r > 0$; géométrique à termes positifs croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- **Seuil** : boucle « tant que », le compteur donne le rang cherché.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des termes

- Formule arithmétique : $u_5 = u_0 + 5r = 120 - 40 = 80$.
- Formule géométrique : $v_5 = v_0 \times q^5 = 120 \times 0,9^5$.
- $0,9^5 = 0,59049$, donc $v_5 = 70,86$ (arrondi au centième).
- Les deux suites partent du même point mais décroissent différemment : -8 par étape pour l'une, -10% pour l'autre.

Réponse. $u_5 = 80$ et $v_5 \approx 70,86$.

Correction de l'exercice 2 - Deux termes connus

- Formule du cours : $v_5 = v_2 \times q^3$ (on passe du rang 2 au rang 5, soit 3 étapes).
- Donc $q^3 = \frac{400}{50} = 8$, et comme $2^3 = 8$: $q = 2$.
- Puis $v_2 = v_0 \times q^2$ donne $50 = v_0 \times 4$, soit $v_0 = 12,5$.
- Contrôle : $v_5 = 12,5 \times 2^5 = 12,5 \times 32 = 400$. Correct.

Réponse. $q = 2$ et $v_0 = 12,5$.

Correction de l'exercice 3 - Somme des premiers entiers

- Formule du cours : $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $S = \frac{60 \times 61}{2} = 1\,830$.
- Pour T : il y a $80 - 25 + 1 = 56$ termes, le premier est 25, le dernier 80.

$$T = 56 \times \frac{25 + 80}{2} = 56 \times 52,5 = 2\,940$$

— Contrôle par différence : $\frac{80 \times 81}{2} - \frac{24 \times 25}{2} = 3\,240 - 300 = 2\,940$. Cohérent.

Réponse. $S = 1\,830$ et $T = 2\,940$.

Correction de l'exercice 4 - Somme d'une suite arithmétique

- Nombre de termes : de u_0 à u_{15} , il y a 16 termes.
- Dernier terme : $u_{15} = 45 + 15 \times 12 = 45 + 180 = 225$.
- Formule du cours :

$$\sum_{k=0}^{15} u_k = 16 \times \frac{45 + 225}{2} = 16 \times 135 = 2\,160$$

— Contrôle : la moyenne des termes vaut 135, et $16 \times 135 = 2\,160$.

Réponse. 2 160.

Correction de l'exercice 5 - Somme d'une suite géométrique

Il y a 10 termes ($k = 0$ à 9), donc l'exposant de la formule est $n + 1 = 10$.

$$\sum_{k=0}^9 v_k = 500 \times \frac{1 - 1,08^{10}}{1 - 1,08}$$

- $1,08^{10} \approx 2,158\,925$.
- Numérateur : $1 - 2,158\,925 = -1,158\,925$; dénominateur : $-0,08$.
- Quotient : $\frac{-1,158\,925}{-0,08} \approx 14,486\,562$.
- Donc la somme vaut $500 \times 14,486\,562 \approx 7\,243,28$.

Réponse. $\approx 7\,243,28$.

Correction de l'exercice 6 - Utiliser la notation sigma

a) Les termes sont les multiples de 3 de 3 à 30, soit $3k$ pour k de 1 à 10 :

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k = 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 3 \times 55 = 165$$

b) Les termes sont les puissances de 2 de 2^0 à 2^8 (car $256 = 2^8$) :

$$\sum_{k=0}^8 2^k = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = \frac{1 - 512}{-1} = 511$$

— Contrôle : la somme des puissances de 2 jusqu'à 2^n vaut toujours $2^{n+1} - 1$, ici $512 - 1 = 511$.

Réponse. a) $\sum_{k=1}^{10} 3k = 165$ · b) $\sum_{k=0}^8 2^k = 511$.

Correction de l'exercice 7 - Sens de variation

- a) Arithmétique de raison $15 > 0$: **croissante**.
- b) Géométrique de premier terme positif, $0 < q = 0,95 < 1$: **décroissante**, avec des termes qui se rapprochent de 0.
- c) Géométrique de premier terme positif, $q = 1,03 > 1$: **croissante** (croissance de 3 % par étape).

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) croissante.

Correction de l'exercice 8 - Recherche d'un seuil

a) Hausse de 4 % : suite géométrique de raison 1,04, donc $p_n = 1\,500 \times 1,04^n$.

b) On calcule chaque terme :

n	6	7	8	9
p_n	1 898	1 974	2 053	2 135

— $1,04^6 \approx 1,265\,32$ donc $p_6 \approx 1\,898$; $p_7 \approx 1\,974$; $p_8 \approx 2\,053$; $p_9 \approx 2\,135$.

— Le premier terme dépassant 2 000 est p_8 : c'est au bout de 8 **mois** (soit le 9^e mois de production).

Réponse. a) $p_n = 1\,500 \times 1,04^n$ · b) au rang $n = 8$ ($\approx 2\,053$ pièces).

Correction de l'exercice 9 - Algorithme de seuil

On avance **tant que** la production ne dépasse pas 2 000.

```
def seuil():
    p = 1500
    n = 0
    while p <= 2000:
        p = p * 1.04
        n = n + 1
    return n
```

— La boucle s'arrête au premier rang où $p > 2\,000$, c'est-à-dire $n = 8$.

— La fonction renvoie 8, ce qui confirme le tableau.

Piège. Avec $\text{while } p < 2000$, on s'arrêterait aussi en cas d'égalité : la condition $\leq$ traduit correctement « dépasser ».

Réponse. La fonction renvoie 8.

Correction de l'exercice 10 - Problème : cumul de production

Les productions forment une suite arithmétique avec $a_1 = 800$ et $r = 50$.

a) $a_{12} = 800 + 11 \times 50 = 800 + 550 = 1\,350$ unités.

b) Somme de 12 termes :

$$S_{12} = 12 \times \frac{800 + 1\,350}{2} = 12 \times 1\,075 = 12\,900 \text{ unités}$$

c) Pour n mois, le dernier terme vaut $800 + (n - 1) \times 50 = 750 + 50n$, donc

$$S_n = n \times \frac{800 + 750 + 50n}{2} = n \times \frac{1\,550 + 50n}{2} = 775n + 25n^2$$

Ce cumul augmente chaque mois, puisque chaque production est positive. On cherche le premier n pour lequel il dépasse 20 000, par essais autour de la valeur obtenue en b) :

$S_{16} = 25 \times 256 + 775 \times 16 = 6\,400 + 12\,400 = 18\,800$ unités, c'est insuffisant, puis

$S_{17} = 25 \times 289 + 775 \times 17 = 7\,225 + 13\,175 = 20\,400$ unités.

Le cumul dépasse donc 20 000 unités au bout de 17 **mois**.

Réponse. a) 1 350 unités · b) 12 900 unités · c) 17 mois ($S_{17} = 20\,400$).

Correction de l'exercice 11 - Problème : versements avec intérêts

Le versement le plus ancien a fructifié 7 ans, le plus récent 0 an. La valeur acquise est donc

$$S = 1\,000(1,03^7 + 1,03^6 + \dots + 1,03 + 1)$$

— C'est une somme géométrique de premier terme 1, de raison 1,03 et de 8 termes :

$$1 + 1,03 + \dots + 1,03^7 = \frac{1 - 1,03^8}{1 - 1,03}$$

— $1,03^8 \approx 1,266\,770$, donc le quotient vaut $\frac{-0,266\,770}{-0,03} \approx 8,892\,336$.

— $S \approx 1\,000 \times 8,892\,336 \approx 8\,892,34$ €.

— Contrôle de vraisemblance : 8 versements de 1 000 € font 8 000 € ; les intérêts ajoutent environ 892 €. Plausible.

Réponse. $S \approx 8\,892,34$ €.

Correction de l'exercice 12 - Les places d'une salle de spectacle

a) Le nombre de places augmente de 2 d'une rangée à la suivante : c'est une suite arithmétique de raison 2, avec $u_1 = 18$. Entre la première et la vingt-cinquième rangée, il y a 24 écarts, donc $u_{25} = 18 + 24 \times 2 = 66$ places.

b) Le nombre total de places est la somme des 25 termes, soit le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier :

$$25 \times \frac{18 + 66}{2} = 25 \times 42 = 1\,050 \text{ places}$$

Contrôle : en moyenne, une rangée compte 42 places, ce qui correspond à la rangée du milieu, la treizième ($18 + 12 \times 2 = 42$).

Réponse. a) 66 places · b) 1 050 places.

Correction de l'exercice 13 - Les rebonds d'une balle

a) Remonter à 60 % de la hauteur précédente revient à multiplier par 0,6 : la suite est géométrique de raison 0,6, avec $h_1 = 2 \times 0,6 = 1,2$ m. Donc $h_n = 2 \times 0,6^n$, et $h_5 = 2 \times 0,6^5 = 2 \times 0,077\,76 \approx 0,156$ m, soit environ 15,6 cm.

b) On cherche le premier n tel que $2 \times 0,6^n < 0,1$, c'est-à-dire $0,6^n < 0,05$. Pour $n = 5$, $0,6^5 \approx 0,078$: c'est encore trop. Pour $n = 6$, $0,6^6 \approx 0,047$, d'où $h_6 \approx 9,3$ cm. C'est à partir du **sixième rebond**.

c) C'est la somme de 5 termes d'une suite géométrique de premier terme $h_1 = 1,2$ et de raison 0,6 :

$$h_1 + \dots + h_5 = 1,2 \times \frac{1 - 0,6^5}{1 - 0,6} = 1,2 \times \frac{0,922\,24}{0,4} \approx 2,77 \text{ m}$$

Réponse. a) $h_n = 2 \times 0,6^n$, $h_5 \approx 15,6$ cm · b) au sixième rebond · c) environ 2,77 m.

Correction de l'exercice 14 - Lire une fonction de cumul

a) La variable u part de 5 et est multipliée par 2 à chaque tour : elle parcourt la suite géométrique $u_k = 5 \times 2^k$. Le compteur k prend les valeurs de 0 à n , et l'accumulateur s reçoit u_k à chaque tour. La fonction calcule donc

$$\sum_{k=0}^n 5 \times 2^k = 5 + 10 + \dots + 5 \times 2^n$$

b) En déroulant la boucle pour $n = 4$ (cinq tours) : $s = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 = 155$. Avec la formule des sommes géométriques, pour 5 termes : $5 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 5 \times \frac{-31}{-1} = 155$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. a) $u_k = 5 \times 2^k$, somme $\sum_{k=0}^n 5 \times 2^k$ · b) 155.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : comparer deux plans

a) Plan A : suite arithmétique, $A_n = 10\,000 - 400n$.

— Plan B : suite géométrique, $B_n = 10\,000 \times 0,95^n$.

b) Au bout de 5 ans :

— $A_5 = 10\,000 - 2\,000 = 8\,000$ kWh.

— $B_5 = 10\,000 \times 0,95^5 \approx 10\,000 \times 0,773\,781 \approx 7\,738$ kWh. Le plan **B** est meilleur.

Au bout de 12 ans :

— $A_{12} = 10\,000 - 4\,800 = 5\,200$ kWh.

— $B_{12} = 10\,000 \times 0,95^{12} \approx 10\,000 \times 0,540\,360 \approx 5\,404$ kWh. Le plan **A** repasse devant.

c) Cumul du plan A sur 5 ans (années 0 à 4) : les termes sont 10 000 ; 9 600 ; 9 200 ; 8 800 ; 8 400.

$$S = 5 \times \frac{10\,000 + 8\,400}{2} = 5 \times 9\,200 = 46\,000 \text{ kWh}$$

Réponse. b) À 5 ans : B ($\approx 7\,738$ contre 8 000) · à 12 ans : A (5 200 contre $\approx 5\,404$) · c) 46 000 kWh.