

Plaquette 3 - Convexité et points d'inflexion

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La dérivée seconde. C'est la dérivée de f , notée f' .

$$f \longrightarrow f' \longrightarrow f''$$

Convexité.

Signe de f''	f est	Allure	Position / tangentes
$f'' \geq 0$	convexe	creuse vers le haut	au-dessus
$f'' \leq 0$	concave	ournée vers le bas	en dessous

Point d'inflexion. Point où f'' s'annule **en changeant de signe** : la courbe y traverse sa tangente et change de convexité.

$\triangle f''(x_0) = 0$ ne suffit pas, comme $f(x_0) = 0$ ne suffisait pas pour un extremum.

Deux notions à ne pas confondre.

Question	Outil
ça monte ou ça descend ?	f
ça accélère ou ça ralentit ?	f''

Une fonction peut être **croissante et concave** : elle monte, mais de moins en moins vite.

Cas usuels.

Fonction	Convexité
$ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$	convexe partout
$ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$	concave partout
x^3	concave puis convexe, inflexion en 0
$\frac{1}{x}$	concave sur les négatifs, convexe sur les positifs

Lecture économique. Phase convexe : la croissance **s'accélère**. Phase concave : elle **ralentit**. Le point d'inflexion signale le retournement de tendance.

Correction de l'exercice 1 - Calculer une dérivée seconde

a) **Dérivée première** : $3x^2 - 12x + 9$ ✓

— **On dérive à nouveau, terme en x^2** : $6x$ ✓

— **Terme en x** : -12 ✓

— **Constante** : elle disparaît ✓

— **Dérivée seconde** :

$$f''(x) = 6x - 12$$

b) **Dérivée première** : $-6x^2 + 18x + 24$ ✓

- **Terme en x^2** : $-12x$ ✓
- **Terme en x** : 18 ✓
- **Dérivée seconde** :

$$g''(x) = -12x + 18$$

c) **Dérivée première** : $2x - 8$ ✓

- **Dérivée seconde** : la dérivée d'une fonction affine ✓
- **Valeur** :

$$h''(x) = 2$$

- **Signe** : constant et positif ✓
- **Conséquence** : h est convexe partout ✓
- **Cohérence** : c'est une parabole tournée vers le haut ✓
- **Contrôle de a)** en $x = 2$: $f'(2) = 0$ ✓
- **Contrôle de b)** en $x = 1,5$: $g''(1,5) = 0$ ✓
- **Ces deux valeurs seront les abscisses d'inflexion** ✓
- **Règle générale** : la dérivée seconde d'un degré 3 est **affine** ✓

Réponse. a) $6x - 12$ · b) $-12x + 18$ · c) 2 .

Correction de l'exercice 2 - Étudier la convexité

a) **Annulation** : $6x - 12 = 0$ ✓

- **Solution** : $x = 2$ ✓
- **Coefficient directeur** : $6 > 0$ ✓
- **Signe avant 2** : négatif ✓
- **Contrôle** : $f'(0) = -12$ ✓
- **Signe après 2** : positif ✓
- **Contrôle** : $f'(4) = 12$ ✓

b) **Sur $] -\infty ; 2[$** : $f' < 0$ ✓

- **Conclusion** :

f est concave

- **Sur $]2 ; +\infty[$** : $f' > 0$ ✓

- **Conclusion** :

f est convexe

c) **Changement de signe** : oui, en $x = 2$ ✓

- **Image** : $8 - 24 + 18 + 2$ ✓
- **Valeur** : 4 ✓
- **Point d'inflexion** :

$$(2; 4)$$

- **Lecture** : la courbe y change de convexité ✓
- **Et** : elle y traverse sa tangente ✓
- **Rappel des variations** : maximum en 1, minimum en 3 ✓
- **Position de l'inflexion** : entre les deux ✓
- **Cohérence** : c'est le milieu de $[1; 3]$ ✓
- **Règle pour un degré 3** : l'inflexion est au milieu des extremums ✓

Réponse. a) $f' < 0$ avant 2, > 0 après · b) concave puis convexe · c) le point (2 ; 4).

Correction de l'exercice 3 - Une concavité qui domine

a) **Annulation** : $-12x + 18 = 0$ ✓

— **Isolement** : $12x = 18$ ✓

— **Solution** :

$$x = 1,5$$

b) **Coefficient directeur de g''** : $-12 < 0$ ✓

— **Signe avant 1,5** : positif ✓

— **Contrôle** : $g''(0) = 18$ ✓

— **Convexité** : g est **convexe** ✓

— **Signe après 1,5** : négatif ✓

— **Contrôle** : $g''(3) = -18$ ✓

— **Convexité** : g est **concave** ✓

— **Ordre inversé par rapport à l'exercice précédent** ✓

— **Raison** : le coefficient de x^3 est négatif ✓

c) **Image** : $-2 \times 3,375 + 9 \times 2,25 + 24 \times 1,5 - 5$ ✓

— **Premier terme** : $-6,75$ ✓

— **Deuxième terme** : $20,25$ ✓

— **Troisième terme** : 36 ✓

— **Somme** : $-6,75 + 20,25 + 36 - 5$ ✓

— **Valeur** :

$$g(1,5) = 44,5$$

— **Point d'inflexion** : (1,5 ; 44,5) ✓

— **Rappel des extremums** : -1 et 4 ✓

— **Milieu de $[-1 ; 4]$** : $1,5$ ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. a) $x = 1,5$ · b) convexe puis concave · c) le point (1,5 ; 44,5).

Correction de l'exercice 4 - Convexité d'une parabole

a) **Dérivée** : $6x - 12$ ✓

— **Dérivée seconde** : 6 ✓

— **Signe** : positif, constant ✓

— **Conclusion** :

f est convexe sur $\mathbb{R}$

— **Cohérence** : $a = 3 > 0$ ✓

b) **Dérivée** : $-x + 4$ ✓

— **Dérivée seconde** : -1 ✓

— **Signe** : négatif, constant ✓

— **Conclusion** :

g est concave sur $\mathbb{R}$

— **Cohérence** : $a = -0,5 < 0$ ✓

c) **Dérivée seconde d'un trinôme** : $2a$ ✓

- **Elle est constante** ✓
- **Elle ne change donc jamais de signe** ✓
- **Conclusion** :

jamais de point d'inflexion

- **Règle** : une parabole est convexe **ou** concave, jamais les deux ✓
- **Critère immédiat** : le signe de a ✓
- **Interprétation de a)** : la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes ✓
- **Interprétation de b)** : elle est en dessous ✓
- **Cas d'une fonction affine** : $f' = 0$ partout ✓
- **Elle est à la fois convexe et concave** ✓
- **Raison** : elle coïncide avec ses tangentes ✓

Réponse. a) convexe · b) concave · c) non, jamais.

Correction de l'exercice 5 - La fonction cube

a) **Dérivée** : $3x^2$ ✓

- **Dérivée seconde** : $6x$ ✓
- **Signe avant 0** : négatif ✓
- **Convexité** : concave ✓
- **Signe après 0** : positif ✓
- **Convexité** : convexe ✓

b) **Changement de signe en 0** : oui ✓

- **Image** : $f(0) = 0$ ✓
- **Point d'inflexion** :

(0 ; 0)

- **Tangente en ce point** : $y = 0$ ✓

c) **Dérivée en 0** : $f'(0) = 0$ ✓

- **Changement de signe de f'** : non ✓
- **Raison** : $3x^2 \geq 0$ ✓
- **Conclusion** :

pas d'extremum en 0

- **Mais bien un point d'inflexion** ✓
- **Nom précis** : inflexion à tangente horizontale ✓
- **Ce qui s'y passe** : la courbe traverse sa tangente ✓
- **Contrôle** : $f(-1) = -1 < 0$ ✓
- **Et** : $f(1) = 1 > 0$ ✓
- **La tangente $y = 0$ est bien traversée** ✓
- **Leçon** : f et f' répondent à deux questions différentes ✓
- **Ici** : f croît partout, mais change de courbure ✓

Réponse. a) concave sur les négatifs, convexe sur les positifs · b) (0 ; 0) · c) inflexion sans extremum.

Correction de l'exercice 6 - La fonction inverse

a) **Sur** $]0; +\infty[: x^3 > 0 \checkmark$

— **Donc** : $f'(x) > 0 \checkmark$

— **Contrôle** : $f'(2) = \frac{2}{8} = 0,25 \checkmark$

— **Conclusion** :

f est convexe sur les positifs

— **Sur** $]-\infty; 0[: x^3 < 0 \checkmark$

— **Donc** : $f'(x) < 0 \checkmark$

— **Contrôle** : $f'(-2) = \frac{2}{-8} = -0,25 \checkmark$

— **Conclusion** :

f est concave sur les négatifs

b) **Changement de signe** : oui, en traversant 0 $\checkmark$

— **Mais** : f n'est pas définie en 0 $\checkmark$

— **Conclusion** :

pas de point d'inflexion

— **Raison** : un point d'inflexion est un **point de la courbe** $\checkmark$

— **Ici** : aucun point d'abscisse 0 $\checkmark$

— **Les deux branches sont séparées** $\checkmark$

— **Interprétation de la convexité sur les positifs** : le coût moyen s'aplatit $\checkmark$

— **Lecture** : la baisse ralentit quand la production augmente $\checkmark$

— **Contrôle** : de $x = 1$ à 2 , la fonction perd $0,5 \checkmark$

— **De $x = 2$ à 3** : elle perd $\approx 0,167 \checkmark$

— **La chute ralentit** : c'est la convexité $\checkmark$

Réponse. a) concave sur $]-\infty; 0[$, convexe sur $]0; +\infty[$ · b) non : la fonction n'est pas définie en 0.

Correction de l'exercice 7 - Position par rapport à la tangente

a) **Image** : $f(1) = 1 \checkmark$

— **Nombre dérivé** : $f'(1) = 3 \checkmark$

— **Formule** : $y = 3(x - 1) + 1 \checkmark$

— **Équation** :

$$y = 3x - 2$$

b) **En $x = 2$, la courbe** : $8 \checkmark$

— **La tangente** : $6 - 2 = 4 \checkmark$

— **Comparaison** : la courbe est **au-dessus** $\checkmark$

— **En $x = -2$, la courbe** : $-8 \checkmark$

— **La tangente** : $-6 - 2 = -8 \checkmark$

— **Comparaison** : elles se **croisent** $\checkmark$

— **Remarque** : la tangente en 1 recoupe la courbe en $-2 \checkmark$

c) **Sur les positifs** : f est convexe $\checkmark$

— **Conséquence** : la courbe est au-dessus de ses tangentes $\checkmark$

- **Concordance avec $x = 2$** ✓
- **Sur les négatifs** : f est concave ✓
- **Conséquence** : la courbe est sous ses tangentes ✓
- **Contrôle en $x = -3$, courbe** : -27 ✓
- **Tangente** : $-9 - 2 = -11$ ✓
- **Comparaison** : $-27 < -11$ ✓
- **La courbe est bien en dessous** ✓
- **Règle générale** : la convexité décrit la position par rapport aux tangentes ✓
- **Au point d'inflexion** : la courbe **traverse** sa tangente ✓

Réponse. a) $y = 3x - 2$ · b) au-dessus en 2, égale en -2 · c) convexe à droite, concave à gauche.

Correction de l'exercice 8 - Un tableau complet

- a) **Dérivée première** : $6x^2 - 30x + 24$ ✓
- **Dérivée seconde, terme en x^2** : $12x$ ✓
 - **Terme en x** : -30 ✓
 - **Dérivée seconde** :

$$f''(x) = 12x - 30$$

- b) **Annulation** : $12x = 30$ ✓
- **Solution** : $x = 2,5$ ✓
 - **Signe avant** : négatif ✓
 - **Contrôle** : $f''(0) = -30$ ✓
 - **Signe après** : positif ✓
 - **Contrôle** : $f''(4) = 18$ ✓
 - **Tableau** :

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
convexité	concave	inflexion	convexe

- c) **Image** : $2 \times 15,625 - 15 \times 6,25 + 24 \times 2,5 + 10$ ✓
- **Premier terme** : 31,25 ✓
 - **Deuxième terme** : $-93,75$ ✓
 - **Troisième terme** : 60 ✓
 - **Somme** : $31,25 - 93,75 + 60 + 10$ ✓
 - **Valeur** :

$$f(2,5) = 7,5$$

- **Point d'inflexion** : $(2,5 ; 7,5)$ ✓
- **Rappel des extremums** : 1 et 4 ✓
- **Milieu** : 2,5 ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. a) $12x - 30$ · b) concave puis convexe · c) le point $(2,5 ; 7,5)$.

Correction de l'exercice 9 - Lecture graphique

- a) **La courbe monte partout** ✓

— **Conséquence :**

$$f(x) > 0 \text{ partout}$$

— **Avant 6, elle monte de plus en plus vite ✓**— **Traduction : f croît ✓**— **Après 6, elle monte de moins en moins vite ✓**— **Traduction : f décroît ✓**— **Donc : f a un maximum en 6 ✓**b) **f' est la dérivée de f ✓**— **Avant 6, f croît : $f' > 0$ ✓**— **Après 6, f décroît : $f' < 0$ ✓**— **En 6 : f' s'annule ✓**c) **Changement de signe de f' : oui ✓**— **Conclusion :**

point d'inflexion en $x = 6$

— **Convexité avant : convexe ✓**— **Convexité après : concave ✓**— **Interprétation économique : la croissance se retourne ✓**— **Attention : la fonction continue à croître ✓**— **Ce qui ralentit : son rythme ✓**— **Erreur classique : parler de maximum en 6 ✓**— **Ce qui est vrai : f y atteint son maximum ✓**— **Pas f ✓**— **Exemple concret : des ventes qui plafonnent ✓**

Réponse. a) $f > 0$ partout, avec un maximum en 6 · b) f' positive puis négative · c) un point d'inflexion.

Correction de l'exercice 10 - Un coût de production

a) **Dérivée première : $0,03x^2 - 1,2x + 30$ ✓**— **Dérivée seconde :**

$$C''(x) = 0,06x - 1,2$$

b) **Annulation : $0,06x = 1,2$ ✓**— **Solution : $x = 20$ ✓**— **Signe avant : négatif ✓**— **Convexité : concave ✓**— **Signe après : positif ✓**— **Convexité : convexe ✓**— **Image : $0,01 \times 8000 - 0,6 \times 400 + 600 + 500$ ✓**— **Premier terme : 80 ✓**— **Deuxième terme : -240 ✓**— **Somme : $80 - 240 + 600 + 500$ ✓**— **Valeur :**

$$C(20) = 940 \text{ €}$$

— **Point d'inflexion : (20 ; 940) ✓**

c) **Avant 20 unités** : le coût croît de moins en moins vite ✓

- **Nom** : les rendements sont croissants ✓
- **Après 20 unités** : il croît de plus en plus vite ✓
- **Nom** : les rendements deviennent décroissants ✓
- **Rôle du point d'inflexion** : le seuil de saturation ✓
- **Lien avec le coût marginal** : il y est **minimal** ✓
- **Valeur du coût marginal en 20** : 18 € ✓
- **Décision** : au-delà, chaque unité coûte plus cher ✓

Réponse. a) $0,06x - 1,2$ · b) concave puis convexe, inflexion en (20 ; 940) · c) le coût marginal y est minimal.

Correction de l'exercice 11 - Convexité et extremum

- **Point** $x = 1$: $f(1) = 0$ ✓
- **Changement de signe de f'** : de + à - ✓
- **Nature** : maximum local ✓
- **Signification** : la courbe cesse de monter ✓
- **Valeur de $f'(1)$** : $6 - 12 = -6$ ✓
- **Signe** : négatif ✓
- **La courbe y est concave** ✓
- **Cohérence** : un maximum est toujours dans une zone concave ✓
- **Point** $x = 3$: $f(3) = 0$ ✓
- **Changement de signe** : de - à + ✓
- **Nature** : minimum local ✓
- **Valeur de $f'(3)$** : $18 - 12 = 6$ ✓
- **Signe** : positif ✓
- **Cohérence** : un minimum est dans une zone convexe ✓
- **Point** $x = 2$: $f'(2) = 0$ ✓
- **Valeur de $f(2)$** : $12 - 24 + 9 = -3$ ✓
- **Elle n'est pas nulle** ✓
- **Donc** :

ce n'est pas un extremum

- **C'est un changement de courbure** ✓
- **Résumé** : f répond « monte ou descend », f' répond « accélère ou ralentit » ✓

Réponse. $x = 1$ et $x = 3$ annulent f (extremums) ; $x = 2$ annule f' (changement de courbure).

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

- **Ce qui est juste** : $f'(4) = 0$ ✓
- **Contrôle** : $3 \times 0 = 0$ ✓
- **Ce qui manque** : le changement de signe ✓
- **Signe de $(x - 4)^2$** : positif ou nul ✓
- **Multiplié par 3** : positif ou nul ✓
- **Conclusion** :

$$f' \geq 0 \text{ partout}$$

- **Changement de signe** : aucun ✓
- **Donc** :
pas de point d'inflexion
- **Convexité de f** : convexe sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Ce qui se passe en $x = 4$** : la courbure s'annule un instant ✓
- **Mais elle ne change pas de sens** ✓
- **Contrôle** : $f'(3) = 3$ ✓
- **Contrôle** : $f'(5) = 3$ ✓
- **Les deux sont positifs** ✓
- **Parallèle avec les extremums** : même exigence ✓
- **Là aussi** : $f(x_0) = 0$ ne suffit pas ✓
- **Formulation correcte** : « f' s'annule **en changeant de signe** » ✓
- **Contre-exemple de référence** : $x \mapsto x^4$ en 0 ✓
- **Sa dérivée seconde** : $12x^2$, positive partout ✓

Réponse. $f'' = 3(x - 4)^2 \geq 0$: pas de changement de signe, donc pas d'inflexion.

Correction de l'exercice 13 - Trouver un paramètre

- **Dérivée première** : $3x^2 + 2bx + 5$ ✓
- **Dérivée seconde** : $6x + 2b$ ✓
- **Condition** : $f'(3) = 0$ ✓
- **Substitution** : $18 + 2b = 0$ ✓
- **Isolement** : $2b = -18$ ✓
- **Valeur** :
 $b = -9$
- **Fonction obtenue** : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 5x$ ✓
- **Dérivée seconde** : $6x - 18$ ✓
- **Contrôle** : $f'(3) = 0$ ✓
- **Changement de signe** : oui, le coefficient est $6 > 0$ ✓
- **Convexité avant 3** : concave ✓
- **Convexité après** : convexe ✓
- **Point d'inflexion confirmé** ✓
- **Ordonnée** : $27 - 81 + 15$ ✓
- **Valeur** : -39 ✓
- **Point** : $(3; -39)$ ✓
- **Règle générale pour $ax^3 + bx^2 + cx + d$** : l'inflexion est en $-\frac{b}{3a}$ ✓
- **Contrôle** : $-\frac{-9}{3} = 3$ ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. $b = -9$, avec le point d'inflexion $(3; -39)$.

Correction de l'exercice 14 - Croissante et concave

- a) **Dérivée** : $-3x^2 + 24x + 36$ ✓
- **Valeur en 0** : 36 ✓
- **Valeur en 9** : $-243 + 216 + 36$ ✓

- **Somme** : 9 ✓
- **Positive** ✓
- **Racine positive de f** : $\approx 9,29$ ✓
- **Elle est hors de l'intervalle** ✓
- **Conclusion** :

$$f > 0 \text{ sur } [0; 9]$$

- **Donc** : f est croissante ✓

b) **Dérivée seconde** : $-6x + 24$ ✓

- **Annulation** : $x = 4$ ✓
- **Signe avant** : positif ✓
- **Convexité** : convexe ✓
- **Signe après** : négatif ✓
- **Convexité** : concave ✓
- **Point d'inflexion** : $x = 4$ ✓
- **Image** : $-64 + 192 + 144$ ✓
- **Valeur** :

$$f(4) = 272$$

c) **Sur $[0; 4]$** : les ventes montent de plus en plus vite ✓

- **Phase de décollage** ✓
- **Sur $[4; 9]$** : elles montent de moins en moins vite ✓
- **Phase de maturité** ✓
- **Le point d'inflexion marque le retournement** ✓
- **Mais les ventes continuent d'augmenter** ✓
- **Décision marketing** : relancer avant le rang 4 ✓

Réponse. a) $f > 0$ sur l'intervalle · b) convexe puis concave, inflexion en $(4; 272)$ · c) décollage puis maturité.

Correction de l'exercice 15 - Quatre affirmations

a) **Affirmation** : croissante donc convexe ✓

- **Verdict** :

faux

- **Contre-exemple** : $f(x) = -x^3$ sur les positifs ✓
- **Mieux** : $f(x) = -x^2 + 10x$ sur $[0; 5]$ ✓
- **Elle croît** : $f = -2x + 10 > 0$ ✓
- **Elle est concave** : $f' = -2 < 0$ ✓

b) **Affirmation** : $f' > 0$ donc croissante ✓

- **Verdict** : faux ✓
- **Ce que dit $f' > 0$** : f croît ✓
- **Pas que f croît** ✓
- **Contre-exemple** : $f(x) = x^2$ sur les négatifs ✓
- **Elle est convexe et décroissante** ✓

c) **Affirmation** : convexe donc au-dessus des tangentes ✓

- **Verdict** :

vrai

- **C'est la définition géométrique** ✓
- **Exemple** : x^2 et sa tangente en 1 ✓
- **Tangente** : $y = 2x - 1$ ✓
- **En $x = 3$, courbe** : 9 ✓
- **Tangente** : 5 ✓
- d) **Affirmation** : inflexion donc extremum de f ✓
- **Verdict** : vrai ✓
- **Justification** : f' s'y annule en changeant de signe ✓
- **Or f' est la dérivée de f** ✓
- **Donc f y a un extremum** ✓
- **Interprétation** : la pente y est maximale ou minimale ✓

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : variations et convexité

- a) **Dérivée** : $3x^2 - 18x + 15$ ✓
- **Facteur commun** : 3 ✓
 - **Écriture** : $3(x^2 - 6x + 5)$ ✓
 - **Racines** : 1 et 5 ✓
 - **Contrôle du produit** : 5 ✓
 - **Contrôle de la somme** : 6 ✓
 - **Forme factorisée** : $3(x - 1)(x - 5)$ ✓
 - **Signe** : positif, négatif, positif ✓
 - **Image en 1** : $1 - 9 + 15 + 4$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f(1) = 11$$
- **Nature** : maximum local ✓
 - **Image en 5** : $125 - 225 + 75 + 4$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f(5) = -21$$
- **Nature** : minimum local ✓
- b) **Dérivée seconde** : $6x - 18$ ✓
- **Annulation** : $x = 3$ ✓
 - **Signe avant** : négatif, f concave ✓
 - **Signe après** : positif, f convexe ✓
 - **Image** : $27 - 81 + 45 + 4$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f(3) = -5$$
- **Point d'inflexion** : $(3; -5)$ ✓
- c) **Extremums** : en 1 et en 5 ✓
- **Milieu** : $\frac{1+5}{2} = 3$ ✓
 - **Concordance avec l'inflexion** ✓

- **Règle** : pour un degré 3, l'inflexion est au milieu des extremums ✓
- **Contrôle de l'ordonnée** : $\frac{11 + (-21)}{2} = -5$ ✓
- **Concordance** : la courbe est symétrique autour de ce point ✓

Réponse. a) maximum 11 en 1, minimum -21 en 5 · b) concave puis convexe · c) inflexion $(3; -5)$, au milieu des extremums.