

Plaquette 1 - Dérivée seconde, convexité et optimum

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Dérivées : $(k)' = 0$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(u+v)' = u' + v'$, $(ku)' = ku'$.
- **Variations** : $f' > 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' < 0 \Rightarrow f$ décroissante ; extremum là où f s'annule **en changeant de signe**.
- **Tangente** au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- **Dérivée seconde** f'' : dérivée de f' .
- **Convexité** :
 - $f' \geq 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ est **convexe** (courbe « creuse vers le haut », au-dessus de ses tangentes) ;
 - $f' \leq 0 \Rightarrow f$ est **concave** (courbe tournée vers le bas, sous ses tangentes).
- **Point d'inflexion** : point où f' s'annule **en changeant de signe** ; la courbe y change de convexité.
- Lecture économique : sur une phase convexe, la croissance s'accélère ; sur une phase concave, elle ralentit. Le point d'inflexion marque le **retournement de tendance**.

Correction de l'exercice 1 - Dérivée première et seconde

On dérive terme à terme.

- $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
- On dérive à nouveau : $f'(x) = 6x - 12$.
- Remarque : f est une fonction du second degré, f' une fonction affine. C'est toujours le cas pour un polynôme de degré 3.

Réponse. $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f'(x) = 6x - 12$.

Correction de l'exercice 2 - Variations à partir de f'

- $f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- Les racines sont 1 et 3 ; le coefficient dominant est positif, donc f est positive à l'extérieur de $[1 ; 3]$ et négative entre 1 et 3.

Intervalle	$] -\infty ; 1]$	$[1 ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	−	+
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

- $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$: **maximum local**.
- $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$: **minimum local**.

Réponse. Maximum local 6 en $x = 1$, minimum local 2 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 3 - Convexité et point d'inflexion

On étudie le signe de la dérivée seconde $f''(x) = 6x - 12$.

— $f''(x) = 0$ pour $x = 2$; $f''(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$.

Intervalle	$] - \infty ; 2]$	$[2 ; +\infty[$
Signe de $f''(x)$	—	+
Convexité	concave	convexe

— f' s'annule **en changeant de signe** en $x = 2$: la courbe admet un **point d'inflexion** d'abscisse 2.

— Ordonnée : $f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$. Le point d'inflexion est $I(2 ; 4)$.

Réponse. f est concave sur $] - \infty ; 2]$, convexe sur $[2 ; +\infty[$; point d'inflexion $I(2 ; 4)$.

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître convexité et concavité

a) $f(x) = 6x - 5$ puis $f'(x) = 6 > 0$: f est **convexe** sur $\mathbb{R}$ (parabole vers le haut).

b) $g(x) = -4x + 1$ puis $g''(x) = -4 < 0$: g est **concave** sur $\mathbb{R}$.

c) $h'(x) = 3x^2$ puis $h''(x) = 6x$: négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$. h est **concave** sur $] - \infty ; 0]$ et **convexe** sur $[0 ; +\infty[$, avec un point d'inflexion à l'origine.

d) $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$ puis $k''(x) = \frac{2}{x^3}$, positif pour $x > 0$: k est **convexe** sur $]0 ; +\infty[$.

Réponse. a) convexe · b) concave · c) concave puis convexe (inflexion en 0) · d) convexe.

Correction de l'exercice 5 - Tangente et position de la courbe

a) $f(1) = 1 - 4 + 5 = 2$ et $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(1) = -2$.

— $T: y = -2(x - 1) + 2 = -2x + 4$.

b) $f''(x) = 2 > 0$: la fonction est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

— Propriété du cours : une fonction convexe a sa courbe **au-dessus** de toutes ses tangentes.

— Donc la courbe de f est au-dessus de T , sauf au point de contact $(1 ; 2)$.

— Contrôle par le calcul :

$f(x) - (-2x + 4) = x^2 - 4x + 5 + 2x - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. La différence est bien positive, nulle seulement en $x = 1$.

Réponse. a) $y = -2x + 4$ · b) f convexe : la courbe est au-dessus de T (contact en $x = 1$).

Correction de l'exercice 6 - Dérivée d'un coût moyen

a) $C_M(q) = \frac{2q^2 + 800}{q} = 2q + \frac{800}{q}$.

b) On dérive, en utilisant $\left(\frac{1}{q}\right)' = -\frac{1}{q^2}$:

$$C_M'(q) = 2 - \frac{800}{q^2}$$

c) On résout $C_M'(q) = 0$:

— $2 = \frac{800}{q^2}$, donc $q^2 = 400$ et $q = 20$ (la production est positive).

- Signe : pour $q < 20$, $\frac{800}{q^2} > 2$ donc $C_M' < 0$; pour $q > 20$, $C_M' > 0$. Le coût moyen décroît puis croît : c'est un **minimum**.
- Valeur : $C_M(20) = 40 + 40 = 80$ € par unité.

Réponse. a) $C_M(q) = 2q + \frac{800}{q}$ · b) $C_M'(q) = 2 - \frac{800}{q^2}$ · c) $q = 20$, coût moyen minimal 80 €.

Correction de l'exercice 7 - Bénéfice maximal

a) Bénéfice = recette - coût :

$$B(q) = 60q - (q^3 - 6q^2 + 20q + 8) = -q^3 + 6q^2 + 40q - 8$$

b) On dérive : $B'(q) = -3q^2 + 12q + 40$.

- On cherche les racines : $\Delta = 12^2 - 4 \times (-3) \times 40 = 144 + 480 = 624$, $\sqrt{624} \approx 24,98$.
- $q = \frac{-12 \pm 24,98}{-6}$, donc $q_1 \approx \frac{12,98}{-6} \approx -2,16$ (à écarter) et $q_2 \approx \frac{-36,98}{-6} \approx 6,16$.
- Comme $a = -3 < 0$, B' est positive **entre** les racines, donc positive sur $[0; 6,16[$ et négative après.
- Le bénéfice est donc maximal pour $q \approx 6,16$ centaines d'articles, soit environ 616 articles.
- Valeur : $B(6,16) \approx -234,1 + 227,9 + 246,5 - 8 \approx 232,3$ centaines d'euros, soit environ 23 230 €.

Réponse. a) $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 40q - 8$ · b) $q \approx 6,16$ (soit 616 articles), bénéfice $\approx 23\,230$ €.

Correction de l'exercice 8 - Lire la convexité sur un graphique

- a) « Creuse vers le haut » signifie **convexe**, donc $f' \geq 0$ sur $[0; 4]$; « tournée vers le bas » signifie **concave**, donc $f' \leq 0$ sur $[4; 10]$.
- b) f' change de signe en 4 : la courbe y admet un **point d'inflexion**.
- c) Interprétation économique : jusqu'à $x = 4$, le chiffre d'affaires augmente de plus en plus vite (croissance **accélérée**) ; après $x = 4$, il continue d'augmenter mais de moins en moins vite (croissance **ralentie**). Le point d'inflexion marque le moment où la dynamique se retourne — une information stratégique.

Réponse. a) $f' \geq 0$ puis $f' \leq 0$ · b) un point d'inflexion · c) la croissance passe d'accélérée à ralentie.

Correction de l'exercice 9 - Coût marginal et convexité

a) $C'(q) = 0,6q^2 - 6q + 30$.

b) C' est une fonction du second degré avec $a = 0,6 > 0$: son minimum est au sommet.

$$\alpha = \frac{6}{2 \times 0,6} = \frac{6}{1,2} = 5.$$

— $C'(5) = 0,6 \times 25 - 30 + 30 = 15$ € par unité supplémentaire.

c) On calcule $C''(q) = 1,2q - 6$, nulle en $q = 5$, négative avant, positive après.

— C est donc **concave** sur $[0; 5]$ et **convexe** sur $[5; 20]$, avec un point d'inflexion en $q = 5$.

— Lien : le coût marginal (c'est-à-dire C') est minimal exactement là où la convexité change, en $q = 5$. Avant, chaque unité supplémentaire coûte de moins en moins cher ; après, de plus en plus cher.

Réponse. a) $C'(q) = 0,6q^2 - 6q + 30$ · b) minimal en $q = 5$ (15 €) · c) $q = 5$ est le point d'inflexion de C .

Correction de l'exercice 10 - Optimiser une surface

a) Si un côté mesure x , l'autre mesure $\frac{2400}{x}$ (aire imposée).

— Coût : $C(x) = 2 \times 30x + 2 \times 50 \times \frac{2400}{x} = 60x + \frac{240000}{x}$, pour $x > 0$.

b) On dérive :

$$C'(x) = 60 - \frac{240000}{x^2}$$

— $C'(x) = 0$ donne $x^2 = \frac{240000}{60} = 4000$, donc $x = \sqrt{4000} \approx 63,2$ m.

— Signe : $C' < 0$ avant, $C' > 0$ après : c'est bien un **minimum**.

— L'autre côté mesure alors $\frac{2400}{63,2} \approx 38,0$ m, et le coût minimal vaut
 $C(63,2) \approx 60 \times 63,2 + \frac{240000}{63,2} \approx 7589$ €.

— Cohérent : le côté le moins cher est le plus long, ce qui est logique économiquement.

Réponse. a) $C(x) = 60x + \frac{240000}{x}$ · b) $x \approx 63,2$ m (coût ≈ 7589 €).

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : étude complète

a) $f(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x - 3)(x + 1)$.

— Racines : -1 et 3 . Avec $a = -3 < 0$, f est positive **entre** les racines.

Intervalle	$[-2; -1]$	$[-1; 3]$	$[3; 5]$
Signe de $f(x)$	—	+	—
Variations de f	décroissante	croissante	décroissante

— $f(-1) = 1 + 3 - 9 - 5 = -10$ (minimum local) et $f(3) = -27 + 27 + 27 - 5 = 22$ (maximum local).

b) $f'(x) = -6x + 6$, nulle en $x = 1$, positive avant, négative après.

— f est **convexe** sur $[-2; 1]$ et **concave** sur $[1; 5]$.

— $f(1) = -1 + 3 + 9 - 5 = 6$: le point d'inflexion est $I(1; 6)$.

c) On compare les valeurs aux bornes et aux extremums : $f(-2) = 8 + 12 - 18 - 5 = -3$,
 $f(-1) = -10$, $f(3) = 22$, $f(5) = -125 + 75 + 45 - 5 = -10$.

— Le **maximum** de f sur $[-2; 5]$ vaut donc 22, atteint en $x = 3$.

Réponse. a) décroissante, croissante, décroissante · b) convexe puis concave, $I(1; 6)$ · c) maximum 22 en $x = 3$.