

Plaquette 2 - Dérivées et tableaux de variations

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées de référence.

Fonction	Dérivée
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Opérations.

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k u'$$

Le théorème des variations.

Signe de f'	f
$f' > 0$	croissante
$f' < 0$	décroissante

Extremum. Il y a extremum en x_0 si $f'(x_0) = 0$ **et** que f' change de signe.

$\triangle f'(x_0) = 0$ ne suffit pas : pour $x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ sans extremum.

Signe d'une dérivée du second degré. $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre elles ; si $\Delta < 0$, il garde le signe de a partout.

Extremum sur un intervalle fermé. Comparer les extremums locaux **et** les valeurs aux bornes.

Méthode en cinq temps. Dériver · factoriser · signe · tableau · images aux extremums.

Correction de l'exercice 1 - Dériver des polynômes

a) **Terme en x^3 :** $3x^2$ ✓

— **Terme en x^2 :** $-12x$ ✓

— **Terme en x :** 9 ✓

— **Constante :** elle disparaît ✓

— **Dérivée :**

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

b) **Terme en x^3 :** $3 \times (-2) = -6$ ✓

— **Dérivée partielle :** $-6x^2$ ✓

- **Terme en x^2** : $18x$ ✓
- **Terme en x** : 24 ✓
- **Dérivée** :

$$g'(x) = -6x^2 + 18x + 24$$

- c) **Terme en x^3** : $3 \times 0,5 = 1,5$ ✓
- **Dérivée partielle** : $1,5x^2$ ✓
 - **Terme en x^2** : $-6x$ ✓
 - **Constante** : elle disparaît ✓
 - **Dérivée** :

$$h'(x) = 1,5x^2 - 6x$$

- **Factorisation utile** : $1,5x(x - 4)$ ✓
- **Racines** : 0 et 4 ✓
- **Contrôle de a)** en $x = 1$: $3 - 12 + 9 = 0$ ✓
- **Contrôle de b)** en $x = 4$: $-96 + 72 + 24 = 0$ ✓
- **Contrôle de c)** en $x = 4$: $24 - 24 = 0$ ✓

Réponse. a) $3x^2 - 12x + 9$ · b) $-6x^2 + 18x + 24$ · c) $1,5x^2 - 6x$.

Correction de l'exercice 2 - Dériver avec la fonction inverse

- a) **Premier terme** : 1 ✓
- **Second terme** : $16 \times \frac{1}{x}$ ✓
 - **Sa dérivée** : $-\frac{16}{x^2}$ ✓
 - **Dérivée** :

$$f(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

- b) **Premier terme** : $4x$ ✓
- **Second terme** : $-9 \times \frac{1}{x}$ ✓
 - **Sa dérivée** : $-9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ✓
 - **Simplification** : $+\frac{9}{x^2}$ ✓
 - **Dérivée** :

$$g'(x) = 4x + \frac{9}{x^2}$$

- **Attention** : deux signes moins donnent un plus ✓

- c) **Premier terme** : $-\frac{25}{x^2}$ ✓
- **Constante** : elle disparaît ✓
 - **Dérivée** :

$$h'(x) = -\frac{25}{x^2}$$

- **Signe** : toujours négatif ✓
- **Conséquence** : h décroît sur chaque branche ✓
- **Contrôle de a)** en $x = 4$: $1 - 1 = 0$ ✓

- **Contrôle de b) en $x = 1$:** $4 + 9 = 13$ ✓
- **Contrôle de c) en $x = 5$:** -1 ✓

Réponse. a) $1 - \frac{16}{x^2}$ · b) $4x + \frac{9}{x^2}$ · c) $-\frac{25}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3 - Annuler une dérivée

- **Dérivée :** $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ✓
- **Facteur commun :** 3 ✓
- **Écriture :** $3(x^2 - 4x + 3)$ ✓
- **Recherche de racines évidentes** ✓
- **Produit des racines :** 3 ✓
- **Somme des racines :** 4 ✓
- **Couple :** 1 et 3 ✓
- **Forme factorisée :**

$$f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$$

- **Solutions :**

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 3$$

- **Contrôle :** $f(1) = 3 - 12 + 9 = 0$ ✓
- **Contrôle :** $f(3) = 27 - 36 + 9 = 0$ ✓
- **Contrôle par le discriminant :** $144 - 108$ ✓
- **Valeur :** 36 ✓
- **Racine carrée :** 6 ✓
- **Racines :** $\frac{12 \pm 6}{6}$ ✓
- **Valeurs :** 1 et 3 ✓
- **Concordance** ✓
- **Images correspondantes :** $f(1) = 6$ ✓
- **Et :** $f(3) = 2$ ✓

Réponse. $x = 1$ et $x = 3$, avec $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Correction de l'exercice 4 - Signe d'une dérivée factorisée

- **Premier cas, coefficient dominant :** $3 > 0$ ✓
- **Racines :** 1 et 3 ✓
- **Règle :** positif à l'extérieur ✓
- **Sur $]-\infty; 1[$:** positif ✓
- **Contrôle :** $f(0) = 9$ ✓
- **Sur $]1; 3[$:** négatif ✓
- **Contrôle :** $f(2) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ ✓
- **Sur $]3; +\infty[$:** positif ✓
- **Contrôle :** $f(4) = 3 \times 3 \times 1 = 9$ ✓
- **Second cas, coefficient dominant :** $-6 < 0$ ✓
- **Racines :** -1 et 4 ✓
- **Règle :** négatif à l'extérieur ✓
- **Sur $]-\infty; -1[$:** négatif ✓
- **Contrôle :** $g'(-2) = -6 \times (-6) \times (-1)$ ✓
- **Valeur :** -36 ✓

- **Sur** $] -1 ; 4[$: positif ✓
 - **Contrôle** : $g'(0) = -6 \times (-4) \times 1 = 24$ ✓
 - **Sur** $] 4 ; +\infty[$: négatif ✓
 - **Contrôle** : $g'(5) = -6 \times 1 \times 6 = -36$ ✓
 - **Leçon** : le signe du coefficient dominant commande tout ✓
- Réponse.** $f > 0$ hors de $[1 ; 3]$; $g' > 0$ seulement sur $] -1 ; 4[$.

Correction de l'exercice 5 - Un tableau de variations

- **Dérivée factorisée** : $3(x - 1)(x - 3)$ ✓
- **Racines** : 1 et 3 ✓
- **Signe** : positif, négatif, positif ✓
- **Image en 1** : $1 - 6 + 9 + 2$ ✓
- **Valeur** :

$$f(1) = 6$$

- **Image en 3** : $27 - 54 + 27 + 2$ ✓
- **Valeur** :

$$f(3) = 2$$

- **Tableau** :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 - 0		+
$f(x)$	croît	6	2	croît

- **Nature en** $x = 1$: maximum local ✓
- **Nature en** $x = 3$: minimum local ✓
- **Portée** : locaux seulement ✓
- **Raison** : la fonction repart vers l'infini ✓
- **Contrôle** : $f(0) = 2$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$ ✓
- **Cohérence** : 4 est bien entre 2 et 6 ✓
- **Contrôle** : $f(4) = 64 - 96 + 36 + 2 = 6$ ✓
- **Nombre de solutions de** $f(x) = 4$: trois ✓
- **Justification** : 4 est entre 2 et 6 ✓

Réponse. Croissante, puis décroissante sur $[1 ; 3]$, puis croissante : maximum local 6, minimum local 2.

Correction de l'exercice 6 - Un autre degré 3

- a) **Dérivée** : $-6x^2 + 18x + 24$ ✓
- **Facteur commun** : -6 ✓
- **Écriture** : $-6(x^2 - 3x - 4)$ ✓
- **Produit des racines** : -4 ✓
- **Somme** : 3 ✓
- **Couple** : 4 et -1 ✓
- **Forme factorisée** :

$$g'(x) = -6(x - 4)(x + 1)$$

b) **Signe** : négatif à l'extérieur, positif entre ✓

— **En** $x = -1$: passage de $-$ à $+$ ✓

— **Nature** : minimum local ✓

— **Image** : $2 + 9 - 24 - 5$ ✓

— **Valeur** :

$$g(-1) = -18$$

— **En** $x = 4$: passage de $+$ à $-$ ✓

— **Nature** : maximum local ✓

— **Image** : $-128 + 144 + 96 - 5$ ✓

— **Valeur** :

$$g(4) = 107$$

— **Contrôle** : $g'(0) = 24$, positif ✓

— **Cohérence** : 0 est entre les racines ✓

— **Contrôle** : $g(0) = -5$ ✓

— **Position** : entre -18 et 107 ✓

— **Variations** : décroissante, croissante, décroissante ✓

Réponse. a) $-6(x - 4)(x + 1)$ · b) minimum local -18 en $x = -1$, maximum local 107 en $x = 4$.

Correction de l'exercice 7 - Une dérivée sans racine

— **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 + 12x + 15$ ✓

— **Recherche de racines** : discriminant ✓

— **Calcul** : $144 - 4 \times 3 \times 15$ ✓

— **Produit** : 180 ✓

— **Valeur** :

$$\Delta = -36$$

— **Signe** : négatif ✓

— **Conséquence** : aucune racine réelle ✓

— **Signe de f** : constant ✓

— **Il est celui de** $a = 3$ ✓

— **Conclusion** :

$$f(x) > 0 \text{ pour tout } x$$

— **Donc** : f est croissante sur $\mathbb{R}$ ✓

— **Contrôle** : $f(0) = 15$ ✓

— **Contrôle** : $f(-2) = 12 - 24 + 15 = 3$ ✓

— **Contrôle** : $f(-3) = 27 - 36 + 15 = 6$ ✓

— **Tous positifs** ✓

— **Minimum de la dérivée** : en $x = -2$ ✓

— **Valeur** : 3 ✓

— **Interprétation** : la pente ne descend jamais sous 3 ✓

— **Aucune tangente horizontale** ✓

— **Aucun extremum** ✓

Réponse. $\Delta = -36 < 0$ et $a = 3 > 0$: f reste positive, donc f est croissante.

Correction de l'exercice 8 - Un minimum avec la fonction inverse

- **Dérivée** : $1 - \frac{16}{x^2}$ ✓
- **Annulation** : $\frac{16}{x^2} = 1$ ✓
- **Équation** : $x^2 = 16$ ✓
- **Solutions** : 4 et -4 ✓
- **Intervalle d'étude** : on garde 4 ✓
- **Signe avant 4** : $f'(1) = 1 - 16 = -15$, négatif ✓
- **Signe après 4** : $f'(8) = 1 - 0,25 = 0,75$, positif ✓
- **Variations** : décroissante puis croissante ✓
- **Nature** : un **minimum** ✓
- **Image** : $4 + \frac{16}{4}$ ✓
- **Valeur** :

$$f(4) = 8$$

- **Contrôle** : $f(2) = 2 + 8 = 10$ ✓
- **Contrôle** : $f(8) = 8 + 2 = 10$ ✓
- **Confirmation** : $8 < 10$ ✓
- **Équilibre au minimum** : $x = \frac{16}{x}$ ✓
- **Interprétation** : les deux termes y sont égaux ✓
- **Valeur commune** : 4 ✓
- **Application au coût moyen** : ce minimum est le prix de revient optimal ✓

Réponse. Minimum 8, atteint en $x = 4$.

Correction de l'exercice 9 - Extremums sur un intervalle fermé

- **Racines de la dérivée** : 1 et 3 ✓
- **Les deux sont dans l'intervalle** ✓
- **Valeurs à comparer** : les deux bornes et les deux racines ✓
- **Image en 0** : 2 ✓
- **Image en 1** : 6 ✓
- **Image en 3** : 2 ✓
- **Image en 4** : $64 - 96 + 36 + 2$ ✓
- **Valeur** : 6 ✓
- **Liste** : 2 ; 6 ; 2 ; 6 ✓
- **Maximum** :

$$6$$

- **Il est atteint deux fois** : en $x = 1$ et en $x = 4$ ✓
- **Minimum** :

$$2$$

- **Il est atteint deux fois** : en $x = 0$ et en $x = 3$ ✓
- **Remarque** : les bornes comptent autant que les extremums locaux ✓
- **Ici** : la borne 4 égale le maximum local ✓
- **Contre-exemple utile** : sur $[0 ; 5]$ ✓
- **Image en 5** : $125 - 150 + 45 + 2 = 22$ ✓

- **Nouveau maximum** : 22, atteint en $x = 5$ ✓
- **Le maximum local est alors battu par une borne** ✓
- **Leçon** : toujours tester les bornes ✓

Réponse. Maximum 6 (en $x = 1$ et $x = 4$), minimum 2 (en $x = 0$ et $x = 3$).

Correction de l'exercice 10 - Retrouver des paramètres

- **Première condition** : $f(2) = 8$ ✓
- **Substitution** : $8a + 4b = 8$ ✓
- **Simplification par 4** : $2a + b = 2$ ✓
- **Seconde condition** : $f'(2) = 0$ ✓
- **Dérivée** : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ ✓
- **En $x = 2$** : $12a + 4b = 0$ ✓
- **Simplification par 4** : $3a + b = 0$ ✓
- **Système** : deux équations, deux inconnues ✓
- **Soustraction** : $(3a + b) - (2a + b) = 0 - 2$ ✓
- **Valeur** :

$$a = -2$$

- **Report** : $b = -3a$ ✓
- **Valeur** :

$$b = 6$$

- **Fonction obtenue** : $f(x) = -2x^3 + 6x^2$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = -16 + 24 = 8$ ✓
- **Dérivée** : $f'(x) = -6x^2 + 12x$ ✓
- **Contrôle** : $f'(2) = -24 + 24 = 0$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Autre racine de f'** : $x = 0$ ✓
- **Nature en $x = 2$** : maximum, car $a < 0$ ✓

Réponse. $a = -2$ et $b = 6$, soit $f(x) = -2x^3 + 6x^2$.

Correction de l'exercice 11 - Lire un tableau de variations

- a) **Sur $] -\infty ; -2[$** : $f' > 0$ ✓
- **Sur $] -2 ; 5[$** : $f' < 0$ ✓
- **Sur $] 5 ; +\infty[$** : $f' > 0$ ✓
- **En -2 et 5** : f' s'annule ✓
- b) **Première branche** : elle monte jusqu'à 12 ✓
- **Elle traverse 0 une fois** ✓
- **Deuxième branche** : de 12 à -9 ✓
- **Elle traverse 0 une fois** ✓
- **Troisième branche** : elle repart de -9 ✓
- **Elle traverse 0 une fois** ✓
- **Total** :

3 solutions

- c) **Valeur 12** : c'est le maximum local ✓
- **Première branche** : elle atteint 12 exactement une fois ✓

- **Deuxième branche** : elle part de 12 et descend ✓
- **Elle ne repasse pas par 12** ✓
- **Troisième branche** : elle monte depuis -9 ✓
- **Elle atteint 12 une fois** ✓
- **Total** :

2 solutions

- **Nuance** : le point $x = -2$ est compté une fois ✓
- **Nombre de solutions de $f(x) = 20$** : une seule ✓
- **Justification** : seule la troisième branche y monte ✓
- **Nombre de solutions de $f(x) = -15$** : aucune ✓
- **Justification** : -15 est sous le minimum local, et la courbe monte à gauche ✓

Réponse. a) +, -, + · b) trois · c) deux.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ ✓
- **Facteur commun** : 3 ✓
- **Écriture** : $3(x^2 - 2x + 1)$ ✓
- **Identité remarquable** : $(x - 1)^2$ ✓
- **Forme factorisée** :

$$f(x) = 3(x - 1)^2$$

- **Contrôle** : $f(1) = 0$ ✓
- **Ce point est juste** ✓
- **Signe de f** : positif ou nul ✓
- **Raison** : un carré n'est jamais négatif ✓
- **Changement de signe en 1** : aucun ✓
- **Conclusion** :

pas d'extremum

- **Variations réelles** : f est croissante sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Contrôle** : $f(0) = 3$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 12 - 12 + 3 = 3$ ✓
- **Tous deux positifs** ✓
- **Image** : $f(1) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$ ✓
- **Contrôle** : $f(0) = -1$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$ ✓
- **Valeurs croissantes** ✓
- **Nom du point** : point d'inflexion à tangente horizontale ✓
- **Règle correcte** : f doit **changer de signe** ✓

Réponse. $f(x) = 3(x - 1)^2 \geq 0$: pas de changement de signe, donc pas d'extremum.

Correction de l'exercice 13 - Un coût marginal

- a) **Terme en x^3** : $3 \times 0,01 = 0,03$ ✓
- **Dérivée partielle** : $0,03x^2$ ✓
- **Terme en x^2** : $-1,2x$ ✓

- **Terme en x** : 30 ✓
- **Charges fixes** : elles disparaissent ✓
- **Coût marginal** :

$$C'(x) = 0,03x^2 - 1,2x + 30$$

b) **En $x = 20$** : $0,03 \times 400 - 24 + 30$ ✓

- **Premier terme** : 12 ✓
- **Somme** : $12 - 24 + 30$ ✓
- **Valeur** :

18 €

— **En $x = 50$** : $0,03 \times 2500 - 60 + 30$ ✓

- **Premier terme** : 75 ✓
- **Somme** : $75 - 60 + 30$ ✓
- **Valeur** :

45 €

c) **On dérive le coût marginal** ✓

- **Calcul** : $0,06x - 1,2$ ✓
- **Annulation** : $0,06x = 1,2$ ✓
- **Solution** :

$x = 20$ unités

- **Signe avant** : négatif ✓
- **Signe après** : positif ✓
- **Nature** : un minimum ✓
- **Valeur minimale** : 18 € ✓
- **Interprétation** : l'atelier est le plus efficace à 20 unités ✓

Réponse. a) $0,03x^2 - 1,2x + 30$ · b) 18 € et 45 € · c) pour $x = 20$, à 18 €.

Correction de l'exercice 14 - Croissance d'un modèle

a) **Dérivée** : $-3x^2 + 24x + 36$ ✓

- **Facteur commun** : -3 ✓
- **Écriture** : $-3(x^2 - 8x - 12)$ ✓
- **Discriminant** : $64 + 48$ ✓
- **Valeur** : 112 ✓
- **Racine carrée** : $\approx 10,583$ ✓
- **Première racine** : $\frac{8 - 10,583}{2}$ ✓
- **Valeur** : $\approx -1,29$ ✓
- **Seconde racine** : $\frac{8 + 10,583}{2}$ ✓
- **Valeur** :

$\approx 9,29$

b) **Signe sur $[0; 9,29]$** : positif ✓

- **Contrôle** : $f'(0) = 36$ ✓
- **Signe sur $]9,29; 12]$** : négatif ✓
- **Contrôle** : $f'(12) = -432 + 288 + 36 = -108$ ✓

- **Nature en 9,29** : un maximum ✓
- **Image** : $-801,77 + 1035,65 + 334,44$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 568,32$$

- **Contrôle aux bornes** : $f(0) = 0$ ✓
- **Et** : $f(12) = -1728 + 1728 + 432 = 432$ ✓
- **Comparaison** : 568,32 l'emporte ✓
- **Maximum sur l'intervalle** : $\approx 568,32$ ✓
- **Interprétation** : une production de 9,29 centaines d'unités ✓

Réponse. a) $-3(x^2 - 8x - 12)$ · b) maximum $\approx 568,32$ pour $x \approx 9,29$.

Correction de l'exercice 15 - Deux fonctions à comparer

a) **Dérivée de f** : $2x - 6$ ✓

- **Annulation** : $x = 3$ ✓
- **Image** : $9 - 18 + 13$ ✓
- **Valeur** :

$$f(3) = 4$$

- **Nature** : minimum, car $a > 0$ ✓
- **Dérivée de g** : $-2x + 10$ ✓
- **Annulation** : $x = 5$ ✓
- **Image** : $-25 + 50 - 13$ ✓
- **Valeur** :

$$g(5) = 12$$

- **Nature** : maximum, car $a < 0$ ✓

b) **Équation** : $x^2 - 6x + 13 = -x^2 + 10x - 13$ ✓

- **Tout à gauche** : $2x^2 - 16x + 26 = 0$ ✓
- **Division par 2** : $x^2 - 8x + 13 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $64 - 52$ ✓
- **Valeur** : 12 ✓
- **Racine carrée** : $\approx 3,464$ ✓
- **Première solution** : $\approx 2,27$ ✓
- **Seconde solution** : $\approx 5,73$ ✓
- **Deux points d'intersection** ✓
- **Contrôle en $x \approx 2,27$** : $f \approx 4,53$ ✓
- **Et** : $g \approx 4,55$ ✓
- **Concordance à l'arrondi près** ✓

Réponse. a) minimum 4 en $x = 3$; maximum 12 en $x = 5$ · b) pour $x \approx 2,27$ et $x \approx 5,73$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) **Terme en x^3** : $6x^2$ ✓

- **Terme en x^2** : $-30x$ ✓
- **Terme en x** : 24 ✓
- **Dérivée** :

$$f(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

- **Facteur commun** : 6 ✓
- **Écriture** : $6(x^2 - 5x + 4)$ ✓
- **Produit des racines** : 4 ✓
- **Somme** : 5 ✓
- **Couple** : 1 et 4 ✓
- **Forme factorisée** :

$$f(x) = 6(x - 1)(x - 4)$$

b) **Signe** : positif, négatif, positif ✓

- **Contrôle** : $f(0) = 24$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 24 - 60 + 24 = -12$ ✓
- **Contrôle** : $f(5) = 150 - 150 + 24 = 24$ ✓
- **Tableau** :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f(x)$	+	0 - 0		+
$f(x)$	croît	21	-6	croît

c) **Image en 1** : $2 - 15 + 24 + 10$ ✓

— **Valeur** :

$$f(1) = 21$$

- **Nature** : maximum local ✓
- **Image en 4** : $128 - 240 + 96 + 10$ ✓
- **Valeur** :

$$f(4) = -6$$

- **Nature** : minimum local ✓
- **Contrôle** : $f(0) = 10$ ✓
- **Position** : entre -6 et 21 ✓
- **Nombre de solutions de $f(x) = 0$** : trois ✓

Réponse. a) $6(x - 1)(x - 4)$ · b) croît, décroît sur $[1 ; 4]$, croît · c) maximum 21 en 1, minimum -6 en 4.