

Plaquette 5 – Optimisation économique

Dérivation, convexité et optimisation – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le vocabulaire.

Grandeur	Formule
recette	$R(x) = p \times x$
bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$
coût moyen	$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$
coût marginal	$C'(x)$
seuil de rentabilité	$B(x) = 0$

La méthode d'optimisation. Modéliser · dériver · annuler · étudier le signe · conclure dans le contexte.

Deux résultats à connaître.

Au **minimum du coût moyen**, coût moyen et coût marginal sont égaux :

$$CM(x) = C'(x)$$

Au **maximum du bénéfice** (si R est linéaire de prix p) :

$$C'(x) = p$$

Convexité du coût.

Signe de C''	Rendements	Coût marginal
$C'' < 0$	croissants	il baisse
$C'' > 0$	décroissants	il monte

Le point d'inflexion du coût est le **minimum du coût marginal** : c'est le seuil de saturation de l'atelier.

⚠ Une solution négative ou non entière se discute : on ne produit pas -3 articles.

⚠ Sur un intervalle fermé, comparer aussi les **bornes**.

Correction de l'exercice 1 – Exprimer un bénéfice

a) **Recette** : $400x$ ✓

— **Bénéfice** : recette moins coût ✓

— **Calcul** : $400x - x^3 + 30x^2 - 400x - 500$ ✓

— **Attention aux signes** : tout le coût est soustrait ✓

— **Les termes en x se simplifient** ✓

— **Expression** :

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$$

b) **Calcul de $B(10)$** : $-1000 + 3000 - 500$ ✓

— **Valeur :**

1500 €

— **Calcul de $B(20)$:** $-8000 + 12\,000 - 500$ ✓

— **Valeur :**

3500 €

— **Contrôle de $B(20)$ par les grandeurs** ✓

— **Recette :** $400 \times 20 = 8000$ € ✓

— **Coût :** $8000 - 12\,000 + 8000 + 500$ ✓

— **Valeur :** 4500 € ✓

— **Différence :** 3500 € ✓

— **Concordance** ✓

— **Calcul de $B(15)$:** $-3375 + 6750 - 500$ ✓

— **Valeur :** 2875 € ✓

— **Calcul de $B(25)$:** $-15\,625 + 18\,750 - 500$ ✓

— **Valeur :** 2625 € ✓

— **Observation :** le bénéfice monte puis redescend ✓

Réponse. a) $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$ · b) 1500 € et 3500 €.

Correction de l'exercice 2 - Maximiser le bénéfice

— **Dérivée :** $-3x^2 + 60x$ ✓

— **Facteur commun :** $-3x$ ✓

— **Forme factorisée :**

$$B'(x) = -3x(x - 20)$$

— **Annulation :** $x = 0$ ou $x = 20$ ✓

— **Contexte :** $x = 0$ n'a pas d'intérêt ✓

— **Signe sur $]0; 20[$:** positif ✓

— **Contrôle :** $B'(10) = -30 \times (-10) = 300$ ✓

— **Signe après 20 :** négatif ✓

— **Contrôle :** $B'(30) = -90 \times 10 = -900$ ✓

— **Nature en 20 :** un **maximum** ✓

— **Production optimale :**

20 unités

— **Bénéfice maximal :** 3500 € ✓

— **Contrôle :** $B(15) = 2875$ € ✓

— **Contrôle :** $B(25) = 2625$ € ✓

— **Confirmation** ✓

— **Contrôle par la règle du coût marginal :** $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ ✓

— **En $x = 20$:** $1200 - 1200 + 400$ ✓

— **Valeur :** 400 € ✓

— **Égalité avec le prix de vente** ✓

— **Concordance avec la théorie** ✓

Réponse. 20 unités, pour un bénéfice de 3500 €.

Correction de l'exercice 3 - Les seuils de rentabilité

- **Condition** : $B(x) = 0$ ✓
 - **Pas de racine évidente** : on encadre ✓
 - **Calcul de $B(4)$** : $-64 + 480 - 500$ ✓
 - **Valeur** : -84 € ✓
 - **Négatif** ✓
 - **Calcul de $B(5)$** : $-125 + 750 - 500$ ✓
 - **Valeur** : 125 € ✓
 - **Positif** ✓
 - **Premier seuil** :
entre 4 et 5 unités
 - **Calcul de $B(29)$** : $-24\,389 + 25\,230 - 500$ ✓
 - **Valeur** : 341 € ✓
 - **Positif** ✓
 - **Calcul de $B(30)$** : $-27\,000 + 27\,000 - 500$ ✓
 - **Valeur** : -500 € ✓
 - **Négatif** ✓
 - **Second seuil** :
entre 29 et 30 unités
 - **Conclusion pratique** : rentable de 5 à 29 unités ✓
 - **Cohérence avec le maximum** : 20 est bien dans l'intervalle ✓
 - **Justification de l'encadrement** : B est continue et change de signe ✓
- Réponse.** Rentable pour x entre 5 et 29 unités.

Correction de l'exercice 4 - Convexité d'un coût

a) **Dérivée** :

$$C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$$

— **Dérivée seconde** :

$$C''(x) = 6x - 60$$

b) **Annulation** : $6x = 60$ ✓

- **Solution** : $x = 10$ ✓
- **Signe avant** : négatif ✓
- **Convexité** : C est **concave** ✓
- **Signe après** : positif ✓
- **Convexité** : C est **convexe** ✓
- **Image** : $1000 - 3000 + 4000 + 500$ ✓
- **Valeur** : 2500 € ✓
- **Point d'inflexion** :

$$(10; 2500)$$

c) **Avant 10 unités** : le coût croît de moins en moins vite ✓

- **Nom** : rendements croissants ✓
- **Après 10 unités** : il croît de plus en plus vite ✓

- **Nom** : rendements décroissants ✓
- **Coût marginal en 10** : $300 - 600 + 400$ ✓
- **Valeur** :

100 €

- **Nature de cette valeur** : le **minimum** du coût marginal ✓
- **Justification** : C'' s'y annule en changeant de signe ✓
- **Interprétation** : l'atelier est le plus efficace à 10 unités ✓
- **Au-delà** : chaque unité supplémentaire coûte plus cher ✓

Réponse. a) $3x^2 - 60x + 400$ et $6x - 60$ · b) inflexion en $(10; 2500)$ · c) le coût marginal y est minimal, à 100 €.

Correction de l'exercice 5 - Minimiser un coût moyen

a) **Définition** : $\frac{C(x)}{x}$ ✓

- **Séparation des termes** :

$$CM(x) = 0,5x + 20 + \frac{800}{x}$$

b) **Dérivée** : $0,5 - \frac{800}{x^2}$ ✓

- **Annulation** : $\frac{800}{x^2} = 0,5$ ✓
- **Produit en croix** : $800 = 0,5x^2$ ✓
- **Équation** : $x^2 = 1600$ ✓
- **Solutions** : 40 et -40 ✓
- **On ne garde que** : $x = 40$ ✓
- **Signe avant** : $CM'(20) = 0,5 - 2 = -1,5$, négatif ✓
- **Signe après** : $CM'(80) = 0,5 - 0,125 = 0,375$, positif ✓
- **Nature** : un **minimum** ✓
- **Image** : $20 + 20 + 20$ ✓
- **Valeur** :

$$CM(40) = 60 \text{ €}$$

- **Contrôle** : $CM(20) = 10 + 20 + 40 = 70 \text{ €}$ ✓
- **Contrôle** : $CM(80) = 40 + 20 + 10 = 70 \text{ €}$ ✓
- **Confirmation** ✓
- **Coût marginal** : $C'(x) = x + 20$ ✓
- **En $x = 40$** : 60 € ✓
- **Égalité avec le coût moyen** ✓

Réponse. a) $CM(x) = 0,5x + 20 + \frac{800}{x}$ · b) 40 unités, coût moyen 60 €.

Correction de l'exercice 6 - Coût marginal et coût moyen

- **Coût moyen** : $0,5x + 20 + \frac{800}{x}$ ✓
- **Coût marginal** : $x + 20$ ✓
- **En $x = 20$, coût moyen** : $10 + 20 + 40$ ✓
- **Valeur** : 70 € ✓
- **Coût marginal** : 40 € ✓

- **Comparaison** : le marginal est **en dessous** ✓
- **Conséquence** : produire une unité de plus fait **baisser** la moyenne ✓
- **En $x = 40$, coût moyen** : 60 € ✓
- **Coût marginal** : 60 € ✓
- **Comparaison** :

ils sont égaux

- **Interprétation** : c'est le minimum du coût moyen ✓
- **En $x = 80$, coût moyen** : $40 + 20 + 10$ ✓
- **Valeur** : 70 € ✓
- **Coût marginal** : 100 € ✓
- **Comparaison** : le marginal est **au-dessus** ✓
- **Conséquence** : la moyenne remonte ✓
- **Règle générale** : le marginal croise le moyen en son minimum ✓
- **Image parlante** : une note qui tire la moyenne ✓
- **Si la note est sous la moyenne** : elle la fait baisser ✓
- **Si elle est au-dessus** : elle la fait monter ✓

Réponse. $40 < 70$; $60 = 60$; $100 > 70$: le marginal croise le moyen en son minimum.

Correction de l'exercice 7 - Choisir un prix de vente

a) **Recette** : prix multiplié par quantité ✓

- **Produit** : $p(800 - 10p)$ ✓
- **Développement** :

$$R(p) = -10p^2 + 800p$$

b) **Dérivée** : $-20p + 800$ ✓

- **Annulation** : $20p = 800$ ✓
- **Solution** :

$$p = 40 \text{ €}$$

- **Nature** : maximum, car le coefficient dominant est négatif ✓
- **Contrôle** : $R'(30) = 200$, positif ✓
- **Contrôle** : $R'(50) = -200$, négatif ✓

c) **Quantité** : $800 - 400$ ✓

- **Valeur** : 400 articles ✓
- **Recette** : 40×400 ✓
- **Valeur** :

$$16\,000 \text{ €}$$

- **Contrôle** : $R(35) = 35 \times 450 = 15\,750 \text{ €}$ ✓
- **Contrôle** : $R(45) = 45 \times 350 = 15\,750 \text{ €}$ ✓
- **Confirmation du maximum** ✓
- **Prix au-delà duquel plus personne n'achète** : $q(p) = 0$ ✓
- **Valeur** : 80 € ✓
- **Position du prix optimal** : au milieu de 0 et 80 ✓
- **Règle** : pour une demande affine, le prix optimal est à mi-chemin ✓

Réponse. a) $R(p) = -10p^2 + 800p$ · b) 40 € · c) 400 articles, 16 000 €.

Correction de l'exercice 8 - Une contrainte de capacité

a) **Sans contrainte** : le maximum est en $x = 20$ ✓

— **Bénéfice** :

3500 €

b) **Contrainte** : $x \leq 15$ ✓

— **Position** : $15 < 20$ ✓

— **Conséquence** : le maximum n'est pas atteignable ✓

— **Signe de B' sur $]0; 15]$** : positif ✓

— **Contrôle** : $B'(15) = -3 \times 15 \times (-5)$ ✓

— **Valeur** : 225 ✓

— **Variations** : B croît sur tout l'intervalle ✓

— **Optimum réel** :

$x = 15$ unités

— **Bénéfice** : $-3375 + 6750 - 500$ ✓

— **Valeur** :

2875 €

— **Manque à gagner** : 625 € ✓

— **Leçon** : sur un intervalle fermé, l'optimum peut être une **borne** ✓

— **Gain d'une extension à 18 unités** : $B(18) = -5832 + 9720 - 500$ ✓

— **Valeur** : 3388 € ✓

— **Gain** : 513 € ✓

— **Décision** : investir si l'extension coûte moins ✓

Réponse. a) 20 unités et 3500 € · b) 15 unités, soit 2875 €.

Correction de l'exercice 9 - Une boîte à volume maximal

a) **Côté de la base** : $60 - 2x$ ✓

— **Hauteur** : x ✓

— **Volume** : base au carré multipliée par la hauteur ✓

— **Expression** :

$$V(x) = x(60 - 2x)^2$$

— **Domaine** : $0 < x < 30$ ✓

— **Développement** : $x(3600 - 240x + 4x^2)$ ✓

— **Forme développée** : $4x^3 - 240x^2 + 3600x$ ✓

b) **Dérivée** : $12x^2 - 480x + 3600$ ✓

— **Facteur commun** : 12 ✓

— **Écriture** : $12(x^2 - 40x + 300)$ ✓

— **Produit des racines** : 300 ✓

— **Somme** : 40 ✓

— **Couple** : 10 et 30 ✓

— **Solutions** : $x = 10$ et $x = 30$ ✓

— **Rejet** : $x = 30$ donne un volume nul ✓

— **Signe avant 10** : positif ✓

- **Signe après** : négatif ✓
- **Nature** : un maximum ✓
- **Valeur optimale** :

$$x = 10 \text{ cm}$$

- **Base** : 40 cm de côté ✓
- **Volume** : 10×1600 ✓
- **Valeur** :

$$16\,000 \text{ cm}^3$$

- **Contrôle** : $V(5) = 5 \times 2500 = 12\,500 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle** : $V(15) = 15 \times 900 = 13\,500 \text{ cm}^3$ ✓

Réponse. a) $V(x) = x(60 - 2x)^2$ · b) $x = 10 \text{ cm}$, pour $16\,000 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 10 - Le lot économique

a) **Premier terme** : $200\,000 \times \frac{1}{x}$ ✓

— **Sa dérivée** : $-\frac{200\,000}{x^2}$ ✓

— **Second terme** : 5 ✓

— **Dérivée** :

$$f(x) = 5 - \frac{200\,000}{x^2}$$

b) **Annulation** : $\frac{200\,000}{x^2} = 5$ ✓

— **Produit en croix** : $200\,000 = 5x^2$ ✓

— **Équation** : $x^2 = 40\,000$ ✓

— **Solutions** : 200 et -200 ✓

— **On garde** : $x = 200$ ✓

— **Signe avant** : $f'(100) = 5 - 20 = -15$, négatif ✓

— **Signe après** : $f'(400) = 5 - 1,25 = 3,75$, positif ✓

— **Nature** : un **minimum** ✓

— **Coût** : $\frac{200\,000}{200} + 5 \times 200$ ✓

— **Premier terme** : 1000 ✓

— **Second terme** : 1000 ✓

— **Valeur** :

$$2000 \text{ €}$$

— **Contrôle** : $f(100) = 2000 + 500 = 2500 \text{ €}$ ✓

— **Contrôle** : $f(400) = 500 + 2000 = 2500 \text{ €}$ ✓

— **Confirmation** ✓

— **Observation** : à l'optimum, les deux coûts sont **égaux** ✓

— **Interprétation** : coût de commande et coût de stockage s'équilibrent ✓

Réponse. a) $5 - \frac{200\,000}{x^2}$ · b) des lots de 200 unités, pour 2000 € par an.

Correction de l'exercice 11 - Deux ateliers à comparer

a) **Coût marginal de A** :

$$C_A'(x) = x + 20$$

— **Coût marginal de B :**

$$C_B'(x) = 0,5x + 35$$

— **En $x = 10$, A : 30 € ✓**

— **En $x = 10$, B : 40 € ✓**

— **A est moins cher ✓**

— **En $x = 50$, A : 70 € ✓**

— **En $x = 50$, B : 60 € ✓**

— **B est moins cher ✓**

b) **Égalité :** $x + 20 = 0,5x + 35$ ✓

— **On retranche $0,5x$:** $0,5x + 20 = 35$ ✓

— **On retranche 20 :** $0,5x = 15$ ✓

— **Solution :**

$$x = 30$$

— **Contrôle :** $C_A'(30) = 50$ € ✓

— **Contrôle :** $C_B'(30) = 50$ € ✓

— **Concordance ✓**

— **Conclusion :** A est préférable à la marge **en dessous** de 30 ✓

— **Au-delà :** B prend l'avantage ✓

— **Raison :** le terme en x^2 de A est deux fois plus fort ✓

— **Coût total en $x = 30$, A :** $450 + 600 + 800 = 1850$ € ✓

— **Coût total en $x = 30$, B :** $225 + 1050 + 300 = 1575$ € ✓

— **B est moins cher au total :** ses charges fixes sont plus basses ✓

— **Leçon :** marge et total ne disent pas la même chose ✓

Réponse. a) $x + 20$ et $0,5x + 35$ · b) A est meilleur à la marge en dessous de 30 unités.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

— **Première erreur :** confondre recette et bénéfice ✓

— **Formule :** $B(x) = R(x) - C(x)$ ✓

— **Dérivée :** $B'(x) = R'(x) - C'(x)$ ✓

— **Au maximum de la recette :** $R'(x) = 0$ ✓

— **Alors :** $B'(x) = -C'(x)$ ✓

— **Signe :** négatif, car un coût croît ✓

— **Conséquence :** le bénéfice **décroît** déjà ✓

— **Conclusion :**

le bénéfice culmine avant

— **Seconde erreur :** l'interprétation de $C'' > 0$ ✓

— **Ce que dit $C'' > 0$:** le coût marginal **croît** ✓

— **Traduction économique :** rendements **décroissants** ✓

— **Donc :** les rendements se **dégradent** ✓

— **Formulation correcte :**

$$C'' > 0 \Rightarrow \text{rendements décroissants}$$

— **Cas des rendements croissants :** $C'' < 0$ ✓

- **Là** : le coût marginal baisse ✓
- **Repère mnémotechnique** : coût convexe, production qui coûte de plus en plus ✓
- **Point d'inflexion du coût** : la frontière entre les deux régimes ✓
- **C'est aussi le minimum du coût marginal** ✓

Réponse. Le bénéfice culmine **avant** la recette, et $C'' > 0$ signale des rendements décroissants.

Correction de l'exercice 13 - Le seuil de saturation

a) **Terme en x^3** : $3 \times 0,02 = 0,06$ ✓

— **Dérivée partielle** : $0,06x^2$ ✓

— **Terme en x^2** : $-3,6x$ ✓

— **Terme en x** : 80 ✓

— **Coût marginal** :

$$C'(x) = 0,06x^2 - 3,6x + 80$$

b) **On dérive à nouveau** : $0,12x - 3,6$ ✓

— **Annulation** : $0,12x = 3,6$ ✓

— **Solution** :

$$x = 30 \text{ unités}$$

— **Signe avant** : négatif ✓

— **Signe après** : positif ✓

— **Nature** : un minimum ✓

— **Valeur** : $0,06 \times 900 - 108 + 80$ ✓

— **Premier terme** : 54 ✓

— **Somme** : $54 - 108 + 80$ ✓

— **Valeur** :

$$26 \text{ €}$$

c) **Dérivée seconde du coût** : $0,12x - 3,6$ ✓

— **Elle s'annule en 30** ✓

— **Point d'inflexion du coût** : en $x = 30$ ✓

— **Avant** : C est concave, rendements croissants ✓

— **Après** : C est convexe, rendements décroissants ✓

— **Contrôle du coût marginal en 10** : $6 - 36 + 80 = 50 \text{ €}$ ✓

— **En 50** : $150 - 180 + 80 = 50 \text{ €}$ ✓

— **Symétrie autour de 30** ✓

— **Décision** : 30 unités est le régime le plus efficace ✓

Réponse. a) $0,06x^2 - 3,6x + 80$ · b) 30 unités, à 26 € · c) c'est le point d'inflexion du coût.

Correction de l'exercice 14 - Une marge unitaire

a) **Recette** : $80x$ ✓

— **Bénéfice** : $80x - 0,5x^2 - 20x - 800$ ✓

— **Réduction** :

$$B(x) = -0,5x^2 + 60x - 800$$

b) **Dérivée** : $-x + 60$ ✓

- **Annulation** : $x = 60$ ✓
- **Nature** : maximum, car le coefficient dominant est négatif ✓
- **Image** : $-1800 + 3600 - 800$ ✓
- **Valeur** :

$$B(60) = 1000 \text{ €}$$

- **Contrôle par la règle** : $C'(x) = x + 20$ ✓
- **Égalité au prix** : $x + 20 = 80$ ✓
- **Solution** : $x = 60$ ✓
- **Concordance** ✓

c) **Coût total en 60** : $1800 + 1200 + 800$ ✓

- **Valeur** : 3800 € ✓
- **Coût moyen** : $\frac{3800}{60}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 63,33 \text{ €}$ ✓
- **Marge unitaire** : $80 - 63,33$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 16,67 \text{ €}$$

- **Contrôle** : $16,67 \times 60 \approx 1000 \text{ €}$ ✓
- **Concordance avec le bénéfice** ✓
- **Remarque** : la marge unitaire n'est pas maximale en 60 ✓
- **Elle l'est au minimum du coût moyen** : en $x = 40$ ✓
- **Marge unitaire alors** : $80 - 60 = 20 \text{ €}$ ✓
- **Mais le bénéfice total n'y vaut que** : $-800 + 2400 - 800 = 800 \text{ €}$ ✓
- **Leçon** : maximiser la marge unitaire n'est pas maximiser le bénéfice ✓

Réponse. a) $B(x) = -0,5x^2 + 60x - 800$ · b) 60 unités, 1000 € · c) $\approx 16,67 \text{ €}$ par unité.

Correction de l'exercice 15 - Deux objectifs opposés

a) **Coût moyen** : $0,5x + 20 + \frac{800}{x}$ ✓

- **Minimum** : en $x = 40$ ✓
- **Valeur** :

$$60 \text{ €}$$

b) **Bénéfice** : $-0,5x^2 + 60x - 800$ ✓

- **Maximum** : en $x = 60$ ✓
- **Valeur** :

$$1000 \text{ €}$$

c) **Comparaison des deux productions** : 40 contre 60 ✓

- **Bénéfice en $x = 40$** : $-800 + 2400 - 800$ ✓
- **Valeur** : 800 € ✓
- **Bénéfice en $x = 60$** : 1000 € ✓
- **Écart** : 200 € ✓
- **Objectif habituel d'une entreprise** : le bénéfice ✓
- **Choix** :

$$60 \text{ unités}$$

- **Pourquoi produire au-delà du coût moyen minimal** ✓
- **Chaque unité supplémentaire coûte plus que 60 €** ✓
- **Mais elle rapporte 80 €** ✓
- **Tant que le coût marginal reste sous 80 €, il faut produire** ✓
- **Il atteint 80 € exactement en $x = 60$** ✓
- **Au-delà** : chaque unité coûte plus qu'elle ne rapporte ✓
- **Règle** : produire jusqu'à $C'(x) = p$ ✓

Réponse. a) 40 unités · b) 60 unités · c) 60, car le bénéfice y est supérieur de 200 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète d'une production

a) **Recette** : $300x$ ✓

- **Bénéfice** : $300x - x^3 + 24x^2 - 300x - 1000$ ✓
- **Les termes en x se simplifient** ✓
- **Expression** :

$$B(x) = -x^3 + 24x^2 - 1000$$

- **Dérivée** : $-3x^2 + 48x$ ✓
- **Factorisation** : $-3x(x - 16)$ ✓
- **Annulation** : $x = 0$ ou $x = 16$ ✓
- **Signe sur $]0; 16[$** : positif ✓
- **Signe après** : négatif ✓
- **Production optimale** :

16 unités

- **Bénéfice** : $-4096 + 6144 - 1000$ ✓
- **Valeur** :

1048 €

b) **Coût marginal** : $3x^2 - 48x + 300$ ✓

- **Dérivée seconde** : $6x - 48$ ✓
- **Annulation** : $x = 8$ ✓
- **Convexité avant** : concave ✓
- **Convexité après** : convexe ✓
- **Point d'inflexion** : $x = 8$ ✓

c) **Coût marginal en 8** : $192 - 384 + 300$ ✓

- **Valeur** :

108 €

- **Nature** : son minimum ✓
- **Contrôle** : $C'(16) = 768 - 768 + 300 = 300$ € ✓
- **Égalité avec le prix de vente** ✓
- **Concordance avec le maximum du bénéfice** ✓

Réponse. a) $B(x) = -x^3 + 24x^2 - 1000$, maximum 1048 € en 16 unités · b) inflexion en $x = 8$ · c) coût marginal minimal 108 €.