

Plaquette 4 - Tangentes et lectures graphiques

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le trio à lire ensemble.

Sur le graphique de f	Sur f	Sur f'
la courbe monte	$f' > 0$	—
tangente horizontale	$f' = 0$	—
extremum	f change de signe	—
la courbe se creuse vers le haut	f croît	$f' > 0$
point d'inflexion	f a un extremum	f' change de signe

Équation de la tangente.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Lire $f'(a)$ sur un graphique. C'est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a : on lit deux points de cette droite.

$$f'(a) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lire sur la courbe de f .

Ce qu'on voit sur C_f	Ce que cela dit de f
C_f au-dessus de l'axe	f croît
C_f coupe l'axe	f a un extremum
C_f monte	f est convexe
sommet de C_f	point d'inflexion de f

⚠ Ne pas confondre la courbe de f et celle de f' : un maximum de f' n'est pas un maximum de f .

Nombre de solutions de $f(x) = k$. On compte les branches monotones du tableau que la valeur k traverse.

Correction de l'exercice 1 - Lire un nombre dérivé

a) **Coefficient directeur** : $\frac{38 - (-16)}{2 - 0} \checkmark$

— **Numérateur** : 54 $\checkmark$

— **Dénominateur** : 2 $\checkmark$

— **Valeur** :

$$f'(2) = 27$$

— **Le point de contact a pour abscisse 2** $\checkmark$

— **Son ordonnée se lit sur la tangente** $\checkmark$

— **Valeur** :

$$f(2) = 38$$

b) **Formule** : $y = 27(x - 2) + 38$ ✓

— **Développement** : $27x - 54 + 38$ ✓

— **Équation** :

$$y = 27x - 16$$

— **Contrôle en** $x = 0$: -16 ✓

— **Concordance avec le point donné** ✓

— **Contrôle en** $x = 2$: $54 - 16 = 38$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Signe de la pente** : positif ✓

— **Conséquence** : f croît au voisinage de 2 ✓

— **Piège** : confondre $f(2) = 38$ et $f'(2) = 27$ ✓

— **Repère** : $f(2)$ est une **hauteur**, $f'(2)$ une **pente** ✓

Réponse. a) $f'(2) = 27$ et $f(2) = 38$ · b) $y = 27x - 16$.

Correction de l'exercice 2 - Tangentes horizontales

a) **Dérivée** : $-3x^2 + 12x + 15$ ✓

— **Facteur commun** : -3 ✓

— **Écriture** : $-3(x^2 - 4x - 5)$ ✓

— **Produit des racines** : -5 ✓

— **Somme** : 4 ✓

— **Couple** : 5 et -1 ✓

— **Forme factorisée** :

$$f'(x) = -3(x - 5)(x + 1)$$

b) **Condition** : $f'(x) = 0$ ✓

— **Solutions** : $x = 5$ et $x = -1$ ✓

— **Image en** 5 : $-125 + 150 + 75 - 8$ ✓

— **Valeur** :

$$f(5) = 92$$

— **Image en** -1 : $1 + 6 - 15 - 8$ ✓

— **Valeur** :

$$f(-1) = -16$$

— **Points** : $(5; 92)$ et $(-1; -16)$ ✓

— **Équations des tangentes** : $y = 92$ et $y = -16$ ✓

— **Nature en** 5 : maximum local ✓

— **Justification** : f passe de $+$ à $-$ ✓

— **Contrôle** : $f'(6) = -3 \times 1 \times 7 = -21$ ✓

— **Nature en** -1 : minimum local ✓

— **Contrôle** : $f'(-2) = -3 \times (-7) \times (-1) = -21$ ✓

— **Cohérence** : négatif avant -1 ✓

Réponse. a) $-3(x - 5)(x + 1)$ · b) $(-1; -16)$ et $(5; 92)$.

Correction de l'exercice 3 - Une tangente quelconque

- **Image** : $f(0) = -8$ ✓
- **Nombre dérivé** : $f'(0) = 15$ ✓
- **Formule** : $y = 15(x - 0) - 8$ ✓
- **Équation** :

$$y = 15x - 8$$

- **Valeur de la courbe en 1** : $-1 + 6 + 15 - 8$ ✓
- **Valeur** : 12 ✓
- **Valeur de la tangente en 1** : $15 - 8$ ✓
- **Valeur** : 7 ✓
- **Comparaison** : la courbe est **au-dessus** ✓
- **Explication par la convexité** : $f''(x) = -6x + 12$ ✓
- **Valeur en 0** : 12 ✓
- **Signe** : positif ✓
- **Donc** : f est convexe autour de 0 ✓
- **Conséquence** : la courbe est au-dessus de ses tangentes ✓
- **Concordance** ✓
- **Valeur en $x = 3$, courbe** : $-27 + 54 + 45 - 8 = 64$ ✓
- **Tangente** : $45 - 8 = 37$ ✓
- **La courbe reste au-dessus** ✓
- **Contrôle en $x = -1$, courbe** : -16 ✓
- **Tangente** : -23 ✓
- **Toujours au-dessus** ✓

Réponse. $y = 15x - 8$; en $x = 1$, la courbe vaut 12 contre 7 pour la tangente.

Correction de l'exercice 4 - Du tableau de f' au tableau de f

- a) **Sur $]-\infty; -1[$** : f croît ✓
- **Sur $]-1; 4[$** : f décroît ✓
- **Sur $]4; +\infty[$** : f croît ✓
- **Nature en -1** : maximum local ✓
- **Valeur** : 7 ✓
- **Nature en 4** : minimum local ✓
- **Valeur** : -12 ✓
- **Tableau** :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	$0 - 0$		+
$f(x)$	croît	7	-12	croît

- b) **Première branche** : elle monte jusqu'à 7 ✓
- **Elle traverse 0** ✓
- **Une solution** ✓
- **Deuxième branche** : de 7 à -12 ✓
- **Elle traverse 0** ✓

- Une solution ✓
- Troisième branche : elle repart de -12 ✓
- Elle traverse 0 ✓
- Une solution ✓
- Total :

3 solutions

- Nombre de solutions de $f(x) = 7$: deux ✓
- Nombre de solutions de $f(x) = 10$: une ✓
- Justification : $10 > 7$, seule la dernière branche y monte ✓
- Nombre de solutions de $f(x) = -20$: une ✓

Réponse. a) croît, décroît sur $[-1; 4]$, croît · b) trois solutions.

Correction de l'exercice 5 - Lire la courbe de f'

a) $C_{f'}$ sous l'axe avant -1 ✓

- Donc : $f' < 0$, f décroît ✓
- $C_{f'}$ au-dessus entre -1 et 5 ✓
- Donc : $f' > 0$, f croît ✓
- $C_{f'}$ sous l'axe après 5 ✓
- Donc : f décroît ✓
- Extremums de f : en -1 et en 5 ✓
- Nature en -1 :

minimum

— Nature en 5 :

maximum

b) Sommet de $C_{f'}$: en $x = 2$ ✓

- Avant 2 : f' croît ✓
- Donc : $f' > 0$, f est convexe ✓
- Après 2 : f' décroît ✓
- Donc : $f' < 0$, f est concave ✓
- En $x = 2$:

point d'inflexion de f

- Piège : voir un extremum de f en 2 ✓
- Ce qui est vrai : f y a un maximum ✓
- Interprétation : c'est là que f monte le plus vite ✓
- Position de 2 : au milieu de -1 et 5 ✓
- Cohérence : la parabole est symétrique ✓
- Et : pour un degré 3, l'inflexion est au milieu des extremums ✓

Réponse. a) minimum en -1 , maximum en 5 · b) convexe puis concave, inflexion en $x = 2$.

Correction de l'exercice 6 - Tangente parallèle à une droite

- Pente visée : 9 ✓
- Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ✓
- Équation : $3x^2 - 6x = 9$ ✓

- **Tout à gauche** : $3x^2 - 6x - 9 = 0$ ✓
- **Division par 3** : $x^2 - 2x - 3 = 0$ ✓
- **Produit des racines** : -3 ✓
- **Somme** : 2 ✓
- **Couple** : 3 et -1 ✓
- **Solutions** :

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = -1$$

- **Image en 3** : $27 - 27 + 4$ ✓
- **Valeur** : 4 ✓
- **Image en -1** : $-1 - 3 + 4$ ✓
- **Valeur** : 0 ✓
- **Points** : $(3; 4)$ et $(-1; 0)$ ✓
- **Tangente en 3** : $y = 9(x - 3) + 4$ ✓
- **Équation** : $y = 9x - 23$ ✓
- **Tangente en -1** : $y = 9(x + 1)$ ✓
- **Équation** : $y = 9x + 9$ ✓
- **Contrôle du parallélisme** : même pente 9 ✓
- **Aucune ne coïncide avec la droite donnée** ✓

Réponse. Aux points $(-1; 0)$ et $(3; 4)$, de tangentes $y = 9x + 9$ et $y = 9x - 23$.

Correction de l'exercice 7 - Du graphique aux signes

- **Avant -2** : la courbe monte ✓
- **Signe** : $f' > 0$ ✓
- **Entre -2 et 4** : elle descend ✓
- **Signe** : $f' < 0$ ✓
- **Après 4** : elle remonte ✓
- **Signe** : $f' > 0$ ✓
- **En -2 et 4** : $f' = 0$ ✓
- **Passage à la convexité** ✓
- **Avant l'inflexion, en $x = 1$** ✓
- **Une courbe qui a un maximum y est concave** ✓
- **Signe sur $] -\infty; 1[$** :

$$f' < 0$$

- **Après l'inflexion** : convexe ✓
- **Signe sur $]1; +\infty[$** :

$$f' > 0$$

- **Cohérence avec le minimum en 4** : il est en zone convexe ✓
- **En $x = 1$** : $f' = 0$ ✓
- **Contrôle de la position** : 1 est bien entre -2 et 4 ✓
- **Et c'est leur milieu** ✓
- **Ce que vaut f' en 1** : son minimum ✓
- **Interprétation** : c'est là que la courbe descend le plus vite ✓

Réponse. $f' > 0$, < 0 sur $] -2; 4[$, > 0 ; $f' < 0$ avant 1 , > 0 après.

Correction de l'exercice 8 - Approximation par la tangente

a) **Image** : $f(2) = 8$ ✓

— **Dérivée** : $3x^2$ ✓

— **Nombre dérivé** : $f'(2) = 12$ ✓

— **Formule** : $y = 12(x - 2) + 8$ ✓

— **Équation** :

$$y = 12x - 16$$

b) **Substitution de $x = 2,05$** : $12 \times 2,05 - 16$ ✓

— **Produit** : $24,6$ ✓

— **Estimation** :

$$8,6$$

c) **Valeur exacte** : $2,05^3$ ✓

— **Calcul** : $\approx 8,615125$ ✓

— **Écart** : $\approx 0,0151$ ✓

— **Sens de l'écart** : l'estimation est **inférieure** ✓

— **Explication** : f est convexe en 2 ✓

— **Détail** : $f'(2) = 12 > 0$ ✓

— **Conséquence** : la courbe est au-dessus de la tangente ✓

— **Concordance** ✓

— **Estimation de $2,2^3$** : $26,4 - 16 = 10,4$ ✓

— **Valeur exacte** : $10,648$ ✓

— **Écart** : $0,248$ ✓

— **Constat** : l'écart grandit quand on s'éloigne ✓

— **Bonne pratique** : n'approcher que très près du point de contact ✓

Réponse. a) $y = 12x - 16$ · b) $8,6$ · c) exact $\approx 8,6151$, l'estimation est légèrement basse.

Correction de l'exercice 9 - Reconstituer une fonction

— **Dérivée** : $3x^2 + 2ax + b$ ✓

— **Première condition** : $f(-1) = 0$ ✓

— **Substitution** : $3 - 2a + b = 0$ ✓

— **Deuxième condition** : $f(3) = 0$ ✓

— **Substitution** : $27 + 6a + b = 0$ ✓

— **Soustraction des deux** : $24 + 8a = 0$ ✓

— **Isolement** : $8a = -24$ ✓

— **Valeur** :

$$a = -3$$

— **Report dans la première** : $3 + 6 + b = 0$ ✓

— **Valeur** :

$$b = -9$$

— **Troisième condition** : $f(0) = c$ ✓

— **Valeur** :

$$c = 5$$

- **Fonction obtenue** : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $3x^2 - 6x - 9$ ✓
- **Factorisation** : $3(x - 3)(x + 1)$ ✓
- **Racines** : -1 et 3 ✓
- **Concordance** ✓
- **Image en -1** : $-1 - 3 + 9 + 5 = 10$ ✓
- **Image en 3** : $27 - 27 - 27 + 5 = -22$ ✓
- **Nature confirmée** : maximum puis minimum ✓

Réponse. $a = -3$, $b = -9$, $c = 5$, soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Correction de l'exercice 10 - Nombre de solutions

- **Trois branches monotones** ✓
- **Première** : elle monte jusqu'à 10 ✓
- **Deuxième** : de 10 à -22 ✓
- **Troisième** : elle repart de -22 ✓
- **Cas $k > 10$** : seule la troisième branche y monte ✓
- **Nombre de solutions** :

1

- **Cas $k = 10$** : le maximum est atteint une fois ✓
- **Et la troisième branche y passe** ✓
- **Nombre** : 2 ✓
- **Cas $-22 < k < 10$** : les trois branches sont traversées ✓
- **Nombre** :

3

- **Cas $k = -22$** : le minimum est atteint une fois ✓
- **Et la première branche y passe** ✓
- **Nombre** : 2 ✓
- **Cas $k < -22$** : seule la première branche y descend ✓
- **Nombre** : 1 ✓
- **Contrôle avec $k = 0$** : trois solutions ✓
- **Cohérence** : $-22 < 0 < 10$ ✓
- **Contrôle avec $k = 50$** : une solution ✓
- **Méthode générale** : compter les branches que la droite $y = k$ coupe ✓

Réponse. 1 si $k < -22$ ou $k > 10$; 2 si $k = -22$ ou $k = 10$; 3 entre les deux.

Correction de l'exercice 11 - Deux tangentes à comparer

- a) **Image** : $f(0) = 5$ ✓
- **Dérivée** : $3x^2 - 6x - 9$ ✓
 - **Nombre dérivé** : $f'(0) = -9$ ✓
 - **Formule** : $y = -9x + 5$ ✓
 - **Équation** :

$$y = -9x + 5$$

- **Pente négative** : f décroît en 0 ✓
- **Cohérence** : 0 est entre -1 et 3 ✓

b) **Dérivée seconde** : $6x - 6$ ✓

- **Annulation** : $x = 1$ ✓
- **Changement de signe** : oui ✓
- **Point d'inflexion** : d'abscisse 1 ✓
- **Image** : $1 - 3 - 9 + 5$ ✓
- **Valeur** : -6 ✓
- **Nombre dérivé** : $3 - 6 - 9$ ✓
- **Valeur** : -12 ✓
- **Formule** : $y = -12(x - 1) - 6$ ✓
- **Équation** :

$$y = -12x + 6$$

- **Comparaison des pentes** : $-12 < -9$ ✓
- **Interprétation** : la courbe descend le plus vite au point d'inflexion ✓
- **Justification** : f y atteint son minimum ✓
- **Valeur de ce minimum** : -12 ✓
- **Contrôle** : $f(x) = 3(x - 1)^2 - 12$ ✓

Réponse. a) $y = -9x + 5$ · b) $y = -12x + 6$, au point $(1 ; -6)$.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

- **Confusion** : entre f et f' ✓
- **Ce que dit un maximum de f** : la pente y est maximale ✓
- **Traduction** : f monte le plus vite en 2 ✓
- **Ce n'est pas un maximum de f** ✓
- **Pour un maximum de f** : il faut $f'(2) = 0$ ✓
- **Or** : $f'(2)$ est le maximum de f' ✓
- **S'il est positif** : f croît en 2 ✓
- **Ce qui se passe réellement en 2** ✓
- f y a un extremum ✓
- **Donc f' y change de signe** ✓
- **Conclusion** :

point d'inflexion de f

- **Résumé des lectures** ✓
- **Zéro de f'** : extremum de f ✓
- **Extremum de f'** : inflexion de f ✓
- **Signe de f'** : sens de variation de f ✓
- **Sens de variation de f** : convexité de f ✓
- **Moyen de contrôle** : vérifier si la courbe lue coupe l'axe ✓
- **Si elle le coupe** : c'est bien f' et un extremum de f ✓
- **Bonne pratique** : toujours vérifier de quelle courbe on parle ✓

Réponse. Un maximum de f' donne un **point d'inflexion** de f , pas un maximum.

Correction de l'exercice 13 - Une lecture économique

- a) **Avant l'inflexion** : la courbe est convexe ✓
- **Signe de f''** : positif ✓

— **Donc** : f croît ✓

— **Interprétation** :

la croissance s'accélère

— **Terme courant** : phase de décollage ✓

— **Chaque mois rapporte plus que le précédent** ✓

b) **Après l'inflexion** : la courbe est concave ✓

— **Signe de f'** : négatif ✓

— **Donc** : f décroît ✓

— **Interprétation** :

la croissance ralentit

— **Terme courant** : phase de maturité ✓

c) **Signe de f'** : toujours positif ✓

— **L'énoncé dit que le chiffre d'affaires croît** ✓

— **Conclusion** :

non, il continue d'augmenter

— **Ce qui baisse** : le **rythme** de croissance ✓

— **Confusion à éviter** : ralentir n'est pas reculer ✓

— **Mois où la croissance est maximale** : le 18^e ✓

— **Justification** : f y atteint son maximum ✓

— **Décision** : anticiper un relais de croissance ✓

— **Signal pour un investisseur** : la trajectoire change de nature ✓

Réponse. a) la croissance s'accélère · b) elle ralentit · c) non, le chiffre d'affaires augmente toujours.

Correction de l'exercice 14 - Une tangente qui recoupe

a) **Image** : $1 - 3$ ✓

— **Valeur** : $f(1) = -2$ ✓

— **Dérivée** : $3x^2 - 3$ ✓

— **Nombre dérivé** : $3 - 3 = 0$ ✓

— **Tangente horizontale** ✓

— **Équation** :

$$y = -2$$

b) **Équation** : $x^3 - 3x = -2$ ✓

— **Tout à gauche** : $x^3 - 3x + 2 = 0$ ✓

— **Racine évidente** : $x = 1$ ✓

— **Contrôle** : $1 - 3 + 2 = 0$ ✓

— **Factorisation** : $(x - 1)(x^2 + x - 2)$ ✓

— **Second facteur** : ses racines ✓

— **Produit** : -2 ✓

— **Somme** : -1 ✓

— **Couple** : 1 et -2 ✓

— **Factorisation complète** : $(x - 1)^2(x + 2)$ ✓

— **Solutions** : $x = 1$ (double) et $x = -2$ ✓

— **Autre point d'intersection :**

$$(-2; -2)$$

— **Contrôle :** $f(-2) = -8 + 6 = -2$ ✓— **Concordance** ✓— **Lecture :** la tangente en 1 recoupe la courbe en -2 ✓— **Raison :** la courbe change de convexité entre les deux ✓— **Point d'inflexion :** en $x = 0$ ✓**Réponse.** a) $y = -2$ · b) elle recoupe la courbe au point $(-2; -2)$.**Correction de l'exercice 15 - Trois courbes à identifier**— **Troisième courbe :** maximum en -1 , minimum en 3 ✓— **C'est un comportement de fonction, pas de dérivée** ✓— **Identification :**

$$\text{c'est } f$$

— **Conséquence :** f s'annule en -1 et 3 ✓— **Première courbe :** elle coupe l'axe en -1 et 3 ✓— **Identification :**

$$\text{c'est } f$$

— **Contrôle du signe :** positive avant -1 ✓— **Cohérence :** f y croît ✓— **Contrôle :** négative entre -1 et 3 ✓— **Cohérence :** f y décroît ✓— **Deuxième courbe :** une droite de pente positive ✓— **Identification :**

$$\text{c'est } f'$$

— **Justification :** la dérivée d'une parabole est une droite ✓— **Où coupe-t-elle l'axe ?** Au sommet de la parabole ✓— **Abscisse :** 1 ✓— **Détail :** c'est le milieu de -1 et 3 ✓— **Interprétation :** f a un point d'inflexion en 1 ✓— **Convexité de f :** concave avant 1 , convexe après ✓— **Méthode d'identification :** compter les « virages » ✓— **f en a deux, f un seul, f' aucun** ✓**Réponse.** La courbe à deux extremums est f , la parabole est f , la droite est f' .**Correction de l'exercice 16 - Synthèse : lecture complète**a) **Dérivée factorisée :** $-3(x - 5)(x + 1)$ ✓— **Signe :** négatif, positif, négatif ✓— **Image en -1 :** -16 ✓— **Image en 5 :** 92 ✓— **Tableau :**

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0 + 0$		$-$
$f(x)$	décroît	-16	92	décroît

— **Nature en -1** : minimum local ✓

— **Nature en 5** : maximum local ✓

b) **Dérivée seconde** : $-6x + 12$ ✓

— **Annulation** : $x = 2$ ✓

— **Signe avant** : positif, f convexe ✓

— **Signe après** : négatif, f concave ✓

— **Image** : $-8 + 24 + 30 - 8$ ✓

— **Valeur** :

$$f(2) = 38$$

— **Point d'inflexion** : $(2 ; 38)$ ✓

— **Contrôle** : 2 est le milieu de -1 et 5 ✓

c) **Nombre dérivé** : $-12 + 24 + 15$ ✓

— **Valeur** : 27 ✓

— **Formule** : $y = 27(x - 2) + 38$ ✓

— **Équation** :

$$y = 27x - 16$$

— **Interprétation** : 27 est la pente maximale de la courbe ✓

— **Justification** : f atteint son maximum en 2 ✓

— **Lecture** : c'est là que f croît le plus vite ✓

Réponse. a) minimum -16 en -1 , maximum 92 en 5 · b) $(2 ; 38)$ · c) $y = 27x - 16$, pente maximale de la courbe.