

## Plaquette 3 - Convexité et points d'inflexion

### Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

#### Exercices

#### Méthode

La dérivée dit si ça monte ; la dérivée **seconde** dit si ça accélère. C'est elle qui distingue une croissance qui s'emballe d'une croissance qui s'essouffle — et le point d'inflexion marque le retournement.

#### Exercice 1 - Calculer une dérivée seconde

Calculer  $f$  puis  $f'$ .

- a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$
- b)  $g(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 5$
- c)  $h(x) = x^2 - 8x + 3$

#### Exercice 2 - Étudier la convexité

Soit  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ , de dérivée seconde  $f''(x) = 6x - 12$ .

- a) Étudier le signe de  $f'$ .
- b) En déduire la convexité de  $f$ .
- c) Déterminer le point d'inflexion.

#### Exercice 3 - Une concavité qui domine

Soit  $g(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 5$ , de dérivée seconde  $g''(x) = -12x + 18$ .

- a) Déterminer l'abscisse d'inflexion.
- b) Préciser la convexité de part et d'autre.
- c) Calculer l'ordonnée du point d'inflexion.

#### Exercice 4 - Convexité d'une parabole

- a) Étudier la convexité de  $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ .
- b) Puis celle de  $g(x) = -0,5x^2 + 4x - 1$ .
- c) Une parabole a-t-elle un point d'inflexion ?

#### Exercice 5 - La fonction cube

Soit  $f(x) = x^3$ .

- a) Étudier sa convexité.
- b) Donner son point d'inflexion.
- c) Comparer avec l'absence d'extremum en 0.

**Exercice 6 - La fonction inverse**

Soit  $f(x) = \frac{1}{x}$ , de dérivée  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  et de dérivée seconde  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ .

- a) Étudier la convexité sur chaque branche.
- b) Y a-t-il un point d'inflexion ?

**Exercice 7 - Position par rapport à la tangente**

Soit  $f(x) = x^3$  et sa tangente au point d'abscisse 1.

- a) Donner l'équation de la tangente.
- b) Comparer  $f$  et la tangente en  $x = 2$  puis en  $x = -2$ .
- c) Expliquer avec la convexité.

**Exercice 8 - Un tableau complet**

Soit  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$ .

- a) Calculer  $f''(x)$ .
- b) Dresser le tableau de convexité.
- c) Donner le point d'inflexion.

**Exercice 9 - Lecture graphique**

Une courbe monte sur tout l'intervalle observé, d'abord de plus en plus vite, puis de moins en moins vite, le retournement ayant lieu en  $x = 6$ .

- a) Que peut-on dire de  $f$  ?
- b) De  $f'$  ?
- c) Qu'y a-t-il en  $x = 6$  ?

**Exercice 10 - Un coût de production**

Le coût total est  $C(x) = 0,01x^3 - 0,6x^2 + 30x + 500$  euros.

- a) Calculer  $C''(x)$ .
- b) Étudier la convexité et donner le point d'inflexion.
- c) Interpréter.

**Exercice 11 - Convexité et extremum**

Soit  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ , de maximum local en 1, de minimum local en 3 et d'inflexion en 2.

Expliquer pourquoi ces trois points sont différents, et ce que chacun signifie.

**Exercice 12 - Repérer une erreur**

Un élève écrit : «  $f'(4) = 0$ , donc il y a un point d'inflexion en  $x = 4$  », pour  $f'(x) = 3(x - 4)^2$ . Corriger.

**Exercice 13 - Trouver un paramètre**

Soit  $f(x) = x^3 + bx^2 + 5x$ . Déterminer  $b$  pour que le point d'inflexion ait pour abscisse 3.

**Exercice 14 - Croissante et concave**

Les ventes suivent  $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 36x$  sur  $[0 ; 9]$ .

- Montrer que  $f$  est croissante sur cet intervalle.
- Étudier sa convexité.
- Interpréter.

**Exercice 15 - Quatre affirmations**

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

- Si  $f$  est croissante, alors  $f$  est convexe.
- Si  $f' > 0$ , alors  $f$  est croissante.
- Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.
- Un point d'inflexion est un extremum de  $f$ .

**Exercice 16 - Synthèse : variations et convexité**

Soit  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$ .

- Étudier les variations.
- Étudier la convexité.
- Situer le point d'inflexion par rapport aux extremums.