

## Plaquette 1 - Dérivée seconde, convexité et optimum

### Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

#### Exercices

#### Méthode

On dérive, on étudie le signe de  $f$  pour les variations, puis le signe de  $f'$  pour la **convexité** et les points d'inflexion. On termine par des optimisations de gestion : coût moyen minimal, bénéfice maximal, et lecture économique du point d'inflexion (le moment où la croissance ralentit).

#### Exercice 1 - Dérivée première et seconde

Soit  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ . Calculer  $f(x)$  puis  $f'(x)$ .

#### Exercice 2 - Variations à partir de $f'$

On reprend  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ . Étudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variations sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 3 - Convexité et point d'inflexion

Toujours avec  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$  : étudier la convexité de  $f$  et déterminer son point d'inflexion.

#### Exercice 4 - Reconnaître convexité et concavité

Pour chaque fonction, déterminer la convexité sur  $\mathbb{R}$  (ou sur l'intervalle indiqué).

- a)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
- b)  $g(x) = -2x^2 + x$
- c)  $h(x) = x^3$
- d)  $k(x) = \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

#### Exercice 5 - Tangente et position de la courbe

Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .

- a) Déterminer l'équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 1.
- b) Étudier la convexité de  $f$  et en déduire la position de la courbe par rapport à  $T$ .

#### Exercice 6 - Dérivée d'un coût moyen

Le coût total, en euros, de  $q$  unités produites ( $q > 0$ ) est  $C(q) = 2q^2 + 800$ .

- a) Exprimer le coût moyen  $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ .
- b) Calculer  $C_M'(q)$ .
- c) Déterminer la production qui minimise le coût moyen.

**Exercice 7 - Bénéfice maximal**

Une entreprise vend  $q$  articles (en centaines,  $0 \leq q \leq 10$ ) au prix de 60 € l'unité. Son coût total, en centaines d'euros, est  $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 8$ .

La recette, en centaines d'euros, est  $R(q) = 60q$ .

- Exprimer le bénéfice  $B(q)$ .
- Déterminer la production qui maximise le bénéfice.

**Exercice 8 - Lire la convexité sur un graphique**

La courbe d'une fonction  $f$  est « creuse vers le haut » sur  $[0; 4]$  puis « tournée vers le bas » sur  $[4; 10]$ .

- Que peut-on dire du signe de  $f''$  sur chaque intervalle ?
- Que représente le point d'abscisse 4 ?
- Si  $f$  modélise un chiffre d'affaires croissant, comment interpréter ce point ?

**Exercice 9 - Coût marginal et convexité**

Le coût total de production est  $C(q) = 0,2q^3 - 3q^2 + 30q + 100$  pour  $0 \leq q \leq 20$ .

- Calculer le coût marginal  $C'(q)$ .
- Déterminer pour quelle production le coût marginal est minimal.
- Relier ce résultat à la convexité de  $C$ .

**Exercice 10 - Optimiser une surface**

Une entreprise veut clôturer un entrepôt rectangulaire de 2 400 m<sup>2</sup> d'aire. Le côté de longueur  $x$  (en mètres) coûte 30 € le mètre, l'autre côté 50 € le mètre, et chaque côté est présent deux fois.

- Exprimer le coût total  $C(x)$  de la clôture.
- Déterminer la valeur de  $x$  qui minimise ce coût (arrondie au dixième).

**Exercice 11 - Synthèse : étude complète**

Soit  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$  sur  $[-2; 5]$ .

- Étudier les variations de  $f$ .
- Étudier la convexité et donner le point d'inflexion.
- Donner le maximum de  $f$  sur  $[-2; 5]$ .