

Plaquette 2 - Dérivées et tableaux de variations

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Avant la convexité, il faut le geste de base : dériver, factoriser la dérivée, lire son signe, dresser le tableau. Cette plaquette ne fait que cela, sur des fonctions de degré 3 et sur la fonction inverse.

Exercice 1 - Dériver des polynômes

Dériver.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

b) $g(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 5$

c) $h(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 12$

Exercice 2 - Dériver avec la fonction inverse

Dériver.

a) $f(x) = x + \frac{16}{x}$

b) $g(x) = 2x^2 - \frac{9}{x}$

c) $h(x) = \frac{25}{x} + 40$

Exercice 3 - Annuler une dérivée

Résoudre $f'(x) = 0$ pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

Exercice 4 - Signe d'une dérivée factorisée

Étudier le signe de $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$, puis celui de $g'(x) = -6(x - 4)(x + 1)$.

Exercice 5 - Un tableau de variations

Dresser le tableau de variations de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 - Un autre degré 3

Soit $g(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 5$.

a) Calculer $g'(x)$ et la factoriser.

b) Déterminer les extremums locaux.

Exercice 7 - Une dérivée sans racine

Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 4$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 - Un minimum avec la fonction inverse

Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer son minimum.

Exercice 9 - Extremums sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ sur $[0; 4]$. Déterminer le maximum et le minimum.

Exercice 10 - Retrouver des paramètres

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2$. On sait que $f(2) = 8$ et que la tangente en $x = 2$ est horizontale. Déterminer a et b .

Exercice 11 - Lire un tableau de variations

Un tableau indique : f croissante sur $] -\infty; -2]$, décroissante sur $[-2; 5]$, croissante sur $[5; +\infty[$, avec $f(-2) = 12$ et $f(5) = -9$.

- Donner le signe de f' .
- Combien de solutions a $f(x) = 0$?
- Et $f(x) = 12$?

Exercice 12 - Repérer une erreur

Un élève écrit : « $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ vérifie $f(1) = 0$, donc f a un extremum en 1 ». Corriger.

Exercice 13 - Un coût marginal

Le coût total est $C(x) = 0,01x^3 - 0,6x^2 + 30x + 500$ euros.

- Calculer le coût marginal.
- Le calculer pour $x = 20$ et $x = 50$.
- Pour quelle production est-il minimal ?

Exercice 14 - Croissance d'un modèle

Le chiffre d'affaires est modélisé par $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 36x$ pour x entre 0 et 12.

- Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
- Déterminer le maximum sur l'intervalle.

Exercice 15 - Deux fonctions à comparer

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 13$ et $g(x) = -x^2 + 10x - 13$.

- Déterminer l'extremum de chacune.
- En quels points les deux courbes se coupent-elles ?

Exercice 16 - Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$.

- a) Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
- b) Dresser le tableau de variations.
- c) Donner les extremums locaux.