

Plaquette 5 - Optimisation économique

Dérivation, convexité et optimisation — Terminale STMG

Exercices

Méthode

C'est l'aboutissement du chapitre : on modélise un coût, une recette, un bénéfice, on dérive, on annule, on conclut — et la **convexité** dit si les rendements s'améliorent ou se dégradent.

Exercice 1 - Exprimer un bénéfice

Le coût total est $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 500$ euros et le prix de vente 400 € l'unité.

- Exprimer le bénéfice $B(x)$.
- Calculer $B(10)$ et $B(20)$.

Exercice 2 - Maximiser le bénéfice

Avec $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$, déterminer la production qui maximise le bénéfice.

Exercice 3 - Les seuils de rentabilité

Avec $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$, encadrer les deux seuils de rentabilité par des entiers.

Exercice 4 - Convexité d'un coût

Soit $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 500$.

- Calculer $C'(x)$ puis $C''(x)$.
- Étudier la convexité et donner le point d'inflexion.
- Interpréter.

Exercice 5 - Minimiser un coût moyen

Le coût total est $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 800$ euros.

- Exprimer le coût moyen.
- Déterminer la production qui le minimise.

Exercice 6 - Coût marginal et coût moyen

Avec $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 800$, comparer coût moyen et coût marginal en $x = 20$, $x = 40$ et $x = 80$.

Exercice 7 - Choisir un prix de vente

La demande est $q(p) = 800 - 10p$ articles au prix p euros.

- Exprimer la recette.
- Déterminer le prix qui la maximise.

c) Calculer quantité et recette.

Exercice 8 - Une contrainte de capacité

Avec $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$, l'atelier ne peut produire que 15 unités au maximum.

- a) Quelle serait l'optimum sans contrainte ?
- b) Quelle est la production optimale réelle ?

Exercice 9 - Une boîte à volume maximal

Dans un carré de carton de 60 cm de côté, on découpe quatre carrés de côté x aux coins pour former une boîte sans couvercle.

- a) Exprimer le volume.
- b) Déterminer x pour que le volume soit maximal.

Exercice 10 - Le lot économique

Le coût annuel de gestion d'un stock est $f(x) = \frac{200\,000}{x} + 5x$ euros, où x est la taille des lots commandés.

- a) Calculer $f'(x)$.
- b) Déterminer la taille optimale.

Exercice 11 - Deux ateliers à comparer

Atelier A : $C_A(x) = 0,5x^2 + 20x + 800$. Atelier B : $C_B(x) = 0,25x^2 + 35x + 300$.

- a) Comparer les coûts marginaux.
- b) À partir de quelle production A devient-il préférable à la marge ?

Exercice 12 - Repérer une erreur

Un gérant écrit : « la recette est maximale pour $x = 50$, donc le bénéfice aussi, et comme $C''(x) > 0$, mes rendements s'améliorent ». Corriger les deux erreurs.

Exercice 13 - Le seuil de saturation

Le coût est $C(x) = 0,02x^3 - 1,8x^2 + 80x + 600$ euros.

- a) Calculer le coût marginal.
- b) Déterminer la production où il est minimal.
- c) Interpréter avec la convexité.

Exercice 14 - Une marge unitaire

Avec $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 800$ et un prix de vente de 80 €.

- a) Exprimer le bénéfice.
- b) Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.
- c) Calculer la marge unitaire à l'optimum.

Exercice 15 - Deux objectifs opposés

Toujours avec $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 800$ et un prix de 80 €.

- a) Quelle production minimise le coût moyen ?
- b) Quelle production maximise le bénéfice ?
- c) Laquelle choisir ?

Exercice 16 - Synthèse : étude complète d'une production

Le coût est $C(x) = x^3 - 24x^2 + 300x + 1000$ et le prix de vente 300 €.

- a) Exprimer le bénéfice et le maximiser.
- b) Étudier la convexité du coût.
- c) Calculer le coût marginal au point d'inflexion.