

Plaquette 5 – Doublement, demi-vie et décisions

Fonction exponentielle – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Temps de doublement. Le plus petit n tel que :

$$(1 + t)^n \geq 2$$

Demi-vie. Le plus petit n tel que :

$$(1 - t)^n \leq 0,5$$

La règle des 70. Pour un taux t exprimé en pourcentage :

$$n \approx \frac{70}{t}$$

Taux	Règle	Valeur exacte
2 %	35 ans	35,0
5 %	14 ans	14,2
7 %	10 ans	10,2
10 %	7 ans	7,3

Elle est excellente pour les petits taux, moins bonne au-delà de 10 %.

Divisions successives. Après k demi-vies, il reste :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Demi-vies	Reste
1	50 %
2	25 %
3	12,5 %
4	6,25 %

Pouvoir d'achat.

$$CM_{\text{pouvoir}} = \frac{CM_{\text{revenu}}}{CM_{\text{prix}}}$$

⚠ Doubler n'est pas « gagner 100 % en une fois » : c'est le cumul des périodes.

Correction de l'exercice 1 – Temps de doublement

- a) **Condition** : $1,02^n \geq 2$ ✓
- **Test** $n = 34$: $\approx 1,9607$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test** $n = 35$: $\approx 1,9999$ ✓
- **Presque** ✓
- **Test** $n = 36$: $\approx 2,0399$ ✓

— **Réponse :**

36 ans

— **Règle des 70 :** $\frac{70}{2} = 35$ ✓

— **Très bonne estimation** ✓

b) **Condition :** $1,05^n \geq 2$ ✓

— **Test** $n = 14$: $\approx 1,9799$ ✓

— **Test** $n = 15$: $\approx 2,0789$ ✓

— **Réponse :**

15 ans

— **Règle des 70 :** 14 ✓

c) **Condition :** $1,1^n \geq 2$ ✓

— **Test** $n = 7$: $\approx 1,9487$ ✓

— **Test** $n = 8$: $\approx 2,1436$ ✓

— **Réponse :**

8 ans

— **Règle des 70 :** 7 ✓

— **Écart :** un an ✓

— **Tendance :** la règle sous-estime toujours un peu ✓

— **Précision :** elle se dégrade quand le taux grandit ✓

— **Usage :** une estimation mentale rapide ✓

Réponse. a) 36 ans · b) 15 ans · c) 8 ans.

Correction de l'exercice 2 - Demi-vie

a) **Condition :** $0,95^n \leq 0,5$ ✓

— **Test** $n = 13$: $\approx 0,5133$ ✓

— **Encore au-dessus** ✓

— **Test** $n = 14$: $\approx 0,4877$ ✓

— **Réponse :**

14 ans

— **Règle des 70 :** 14 ✓

— **Concordance parfaite** ✓

b) **Condition :** $0,9^n \leq 0,5$ ✓

— **Test** $n = 6$: $\approx 0,5314$ ✓

— **Test** $n = 7$: $\approx 0,4783$ ✓

— **Réponse :**

7 ans

— **Règle des 70 :** 7 ✓

c) **Condition :** $0,8^n \leq 0,5$ ✓

— **Test** $n = 3$: 0,512 ✓

— **Test** $n = 4$: $\approx 0,4096$ ✓

— **Réponse :**

4 ans

- **Règle des 70** : 3,5 ✓
- **Arrondi supérieur** : 4 ✓
- **Remarque** : la règle vaut aussi pour les baisses ✓
- **Après deux demi-vies** : il reste 25 % ✓
- **Contrôle pour c)** : $0,8^8 \approx 0,1678$ ✓
- **Comparaison à 0,25** : c'est moins ✓
- **Explication** : 4 ans donnent déjà un peu moins de la moitié ✓

Réponse. a) 14 ans · b) 7 ans · c) 4 ans.

Correction de l'exercice 3 – Décroissance par demi-vies

a) **Après une demi-vie** : on divise par deux ✓

— **Masse** :

200 mg

— **Après deux demi-vies, soit 16 jours** : 100 mg ✓

— **Après trois, soit 24 jours** :

50 mg

b) **Nombre de demi-vies** : $\frac{32}{8}$ ✓

— **Valeur** : 4 ✓

— **Proportion restante** : $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ✓

— **Valeur** :

$$\frac{1}{16} = 6,25 \%$$

— **Masse correspondante** : 25 mg ✓

— **Taux journalier équivalent** : $0,5^{\frac{1}{8}}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,9170$ ✓

— **Soit** : $\approx -8,30 \%$ par jour ✓

— **Contrôle** : $0,917^8 \approx 0,5$ ✓

— **Masse au bout de 10 jours** : $400 \times 0,917^{10}$ ✓

— **Coefficient** : $\approx 0,4204$ ✓

— **Valeur** : $\approx 168,17$ mg ✓

— **Cohérence** : entre 200 et 100 mg ✓

— **La masse s'annule-t-elle ?** Non ✓

— **Raison** : le modèle exponentiel reste positif ✓

Réponse. a) 200, 100 et 50 mg · b) 6,25 %, soit 25 mg.

Correction de l'exercice 4 – Inflation et pouvoir d'achat

a) **Coefficient des salaires** : 1,021 ✓

— **Coefficient des prix** : 1,032 ✓

— **Quotient** : $\frac{1,021}{1,032}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,98934$ ✓

— **Évolution** :

$\approx -1,07\%$ par an

b) **Sur dix ans** : $0,98934^{10} \checkmark$

— **Valeur** : $\approx 0,8984 \checkmark$

— **Évolution** :

$\approx -10,16\%$

— **Contrôle par les coefficients** : $\frac{1,021^{10}}{1,032^{10}} \checkmark$

— **Numérateur** : $\approx 1,2310 \checkmark$

— **Dénominateur** : $\approx 1,3702 \checkmark$

— **Quotient** : $\approx 0,8984 \checkmark$

— **Concordance** $\checkmark$

— **Piège** : $10 \times (-1,07) = -10,7\% \checkmark$

— **Écart** : un demi-point $\checkmark$

— **Application sur 2000 € de salaire** : ≈ 2462 € au bout de dix ans $\checkmark$

— **En euros constants** : $\frac{2462}{1,3702} \checkmark$

— **Valeur** : $\approx 1796,82$ € $\checkmark$

— **Perte réelle** : ≈ 204 € par mois $\checkmark$

Réponse. a) $\approx -1,07\%$ par an · b) $\approx -10,16\%$ sur dix ans.

Correction de l'exercice 5 - Doubler une épargne

a) **Coefficient** : $1,045^{15} \checkmark$

— **Valeur** : $\approx 1,9353 \checkmark$

— **Capital** : $5000 \times 1,9353 \checkmark$

— **Valeur** :

$\approx 9676,41$ €

— **Intérêts** : $\approx 4676,41$ € $\checkmark$

b) **Condition** : $1,045^n \geq 2 \checkmark$

— **Test** $n = 15$: $\approx 1,9353 \checkmark$

— **Insuffisant** $\checkmark$

— **Test** $n = 16$: $\approx 2,0224 \checkmark$

— **Objectif atteint** $\checkmark$

— **Réponse** :

16 ans

— **Capital correspondant** : $\approx 10\,111,85$ € $\checkmark$

— **Règle des 70** : $\frac{70}{4,5} \approx 15,6 \checkmark$

— **Arrondi supérieur** : 16 $\checkmark$

— **Concordance** $\checkmark$

— **Quadruplement** : deux doublements $\checkmark$

— **Durée** : 32 ans $\checkmark$

— **Contrôle** : $1,045^{32} \approx 4,09 \checkmark$

— **Capital** : $\approx 20\,450$ € $\checkmark$

— **Leçon** : chaque doublement prend la même durée $\checkmark$

Réponse. a) $\approx 9676,41$ € · b) 16 ans.

Correction de l'exercice 6 - Deux placements à comparer

a) **Coefficient de A** : $1,035^{10}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,4106$ ✓

— **Capital** :

$\approx 5642,40$ €

— **Coefficient de B** : $1,045^{10}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,5530$ ✓

— **Capital** :

$\approx 5590,69$ €

— **A est encore devant** ✓

— **Écart** : $\approx 51,71$ € ✓

b) **Test** $n = 11$, **A** : $\approx 5839,88$ € ✓

— **B** : $\approx 5842,27$ € ✓

— **B passe devant** ✓

— **Réponse** :

à partir de la 11^e année

— **Écart** : $\approx 2,39$ € ✓

— **Test** $n = 12$, **A** : $\approx 6044,27$ € ✓

— **B** : $\approx 6105,17$ € ✓

— **Écart** : $\approx 60,90$ € ✓

— **L'écart se creuse** ✓

— **Explication** : le rapport des capitaux est $\approx 1,111$ ✓

— **Rapport des coefficients** : $\frac{1,045}{1,035} \approx 1,00966$ ✓

— **Il faut environ 11 ans pour combler** ✓

— **Contrôle** : $1,00966^{11} \approx 1,1114$ ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. a) A devant, ≈ 5642 € contre ≈ 5591 € · b) B dépasse A à la 11^e année.

Correction de l'exercice 7 - Le prix d'un logement

a) **Coefficient** : $1,038^8$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,3477$ ✓

— **Prix** : $320\,000 \times 1,3477$ ✓

— **Valeur** :

$\approx 431\,250$ €

— **Plus-value** : $\approx 111\,250$ € ✓

b) **Objectif** : $1,038^n \geq \frac{500\,000}{320\,000}$ ✓

— **Quotient** : $1,5625$ ✓

— **Test** $n = 11$: $\approx 1,5072$ ✓

— **Insuffisant** ✓

— **Test** $n = 12$: $\approx 1,5645$ ✓

— **Objectif atteint** ✓

— **Réponse** :

12 ans

— **Valeur correspondante** : $\approx 500\,632$ € ✓

— **Valeur au rang 11** : $\approx 482\,304$ € ✓

— **Contrôle** : inférieure à $500\,000$ € ✓

— **Temps de doublement** : $\frac{70}{3,8} \approx 18,4$ ✓

— **Contrôle** : $1,038^{19} \approx 2,0312$ ✓

— **Réserve** : 3,8 % sur 12 ans est une hypothèse forte ✓

— **Rappel** : l'immobilier connaît aussi des baisses ✓

Réponse. a) $\approx 431\,250$ € · b) 12 ans.

Correction de l'exercice 8 - Un chiffre d'affaires à doubler

a) **Objectif** : $1,043^n \geq \frac{400\,000}{250\,000}$ ✓

— **Quotient** : 1,6 ✓

— **Test** $n = 11$: $\approx 1,5890$ ✓

— **Insuffisant** ✓

— **Valeur** : $\approx 397\,253$ € ✓

— **Test** $n = 12$: $\approx 1,6573$ ✓

— **Objectif atteint** ✓

— **Valeur** : $\approx 414\,335$ € ✓

— **Réponse** :

12 ans

b) **Relation** : $q^8 = 1,6$ ✓

— **Isolement** : $q = 1,6^{\frac{1}{8}}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0605$ ✓

— **Taux nécessaire** :

$\approx +6,05$ %

— **Vérification** : $1,0605^8 \approx 1,6002$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Écart avec le taux actuel** : $\approx 1,75$ point ✓

— **Interprétation** : il faut accélérer nettement ✓

— **Piège** : $\frac{60}{8} = 7,5$ % ✓

— **Contrôle** : $1,075^8 \approx 1,7835$ ✓

— **Écart** : trop élevé ✓

— **Leçon** : le taux nécessaire est une racine, pas un quotient ✓

Réponse. a) 12 ans · b) environ +6,05 % par an.

Correction de l'exercice 9 - Une valeur à diviser par quatre

a) **Objectif** : $0,85^n \leq \frac{300}{1200}$ ✓

- **Quotient** : 0,25 ✓
- **Test $n = 8$** : $\approx 0,2725$ ✓
- **Encore au-dessus** ✓
- **Clients** : ≈ 327 ✓
- **Test $n = 9$** : $\approx 0,2316$ ✓
- **Seuil franchi** ✓
- **Clients** : ≈ 278 ✓
- **Réponse** :

9 ans

- b) **Demi-vie** : $0,85^n \leq 0,5$ ✓
- **Test $n = 4$** : $\approx 0,5220$ ✓
 - **Test $n = 5$** : $\approx 0,4437$ ✓
 - **Demi-vie** : 5 ans, au plus proche $\approx 4,3$ ✓
 - **Division par quatre** : deux demi-vies ✓
 - **Durée estimée** : $\approx 8,6$ ans ✓
 - **Arrondi supérieur** : 9 ans ✓
 - **Concordance** ✓
 - **Règle des 70** : $\frac{70}{15} \approx 4,7$ ✓
 - **Deux fois** : $\approx 9,3$ ✓
 - **Ordre de grandeur correct** ✓
 - **Clients au bout de 15 ans** : ≈ 106 ✓
 - **Décision** : planifier la fin du support ✓

Réponse. a) 9 ans · b) deux demi-vies d'environ 4,3 ans font $\approx 8,6$ ans.

Correction de l'exercice 10 - Taux équivalents

- a) **Nombre de trimestres** : 4 ✓

- **Relation** : $q^4 = 1,06$ ✓
- **Isolement** : $q = 1,06^{\frac{1}{4}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0147$ ✓
- **Taux** :

$\approx +1,47\%$

- b) **Nombre de mois** : 12 ✓

- **Relation** : $q^{12} = 1,06$ ✓
- **Isolement** : $q = 1,06^{\frac{1}{12}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0049$ ✓
- **Taux** :

$\approx +0,49\%$

- c) **Vérification trimestrielle** : $1,0147^4$ ✓

- **Valeur** : $\approx 1,0601$ ✓
- **Vérification mensuelle** : $1,0049^{12}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0604$ ✓
- **Concordance à l'arrondi près** ✓

- **Piège trimestriel** : $\frac{6}{4} = 1,5\%$ ✓
- **Contrôle** : $1,015^4 \approx 1,0614$ ✓
- **Écart** : un peu trop ✓
- **Piège mensuel** : $\frac{6}{12} = 0,5\%$ ✓
- **Contrôle** : $1,005^{12} \approx 1,0617$ ✓
- **Même constat** ✓
- **Règle** : le taux par sous-période est une **racine** ✓
- **Application, trois trimestres** : $1,06^{0,75} \approx 1,0447$ ✓

Réponse. a) $\approx +1,47\%$ · b) $\approx +0,49\%$ · c) les deux redonnent $\approx 1,06$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

- **Son raisonnement** : accumuler 100 % de hausse ✓
- **Erreur** : les pourcentages ne s'additionnent pas ✓
- **Méthode correcte** : $1,07^n \geq 2$ ✓
- **Test $n = 10$** : $\approx 1,9672$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test $n = 11$** : $\approx 2,1049$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse correcte** :

11 ans

- **Écart avec sa réponse** : 3 ans ✓
- **Sens de l'erreur** : il **surestime** la durée ✓
- **Explication** : les intérêts produisent des intérêts ✓
- **Contrôle de sa réponse** : $1,07^{14} \approx 2,5785$ ✓
- **Lecture** : cela ferait +157,85 % ✓
- **Bien plus qu'un doublement** ✓
- **Bonne estimation mentale** : la règle des 70 ✓
- **Calcul** : $\frac{70}{7} = 10$ ✓
- **Réponse exacte** : 11 ✓
- **La règle sous-estime d'un an** ✓
- **Retenir** : 70, et non 100 ✓

Réponse. Le doublement demande 11 ans, pas 14 : la règle utile est celle des 70.

Correction de l'exercice 12 - Un parc à renouveler

- a) **Coefficient** : 0,82 ✓
- **Calcul de $0,82^5$** : $\approx 0,3707$ ✓
 - **Machines** : $18\,000 \times 0,3707$ ✓
 - **Valeur** :

≈ 6673 machines

- **Perte** : $\approx 11\,327$ ✓

- b) **Objectif** : $0,82^n \leq \frac{6000}{18\,000}$ ✓

- **Quotient** : $\approx 0,3333$ ✓

- **Test** $n = 5$: $\approx 0,3707$ ✓
- **Encore au-dessus** ✓
- **Test** $n = 6$: $\approx 0,3040$ ✓
- **Seuil franchi** ✓
- **Machines** : ≈ 5472 ✓
- **Réponse** :

6 ans

- **Contrôle** : $6673 > 6000 > 5472$ ✓
- **Demi-vie** : $\frac{70}{18} \approx 3,9$ ans ✓
- **Contrôle** : $0,82^4 \approx 0,4521$ ✓
- **Et** : $0,82^3 \approx 0,5514$ ✓
- **Demi-vie exacte** : 4 ans ✓
- **Renouvellement annuel nécessaire pour stabiliser** : 18 % ✓
- **Soit** : 3240 machines par an ✓

Réponse. a) ≈ 6673 machines · b) 6 ans.

Correction de l'exercice 13 - Un seuil réglementaire

a) **Coefficient global visé** : $1 - 0,55$ ✓

- **Valeur** : 0,45 ✓
- **Relation** : $q^{10} = 0,45$ ✓
- **Isolement** : $q = 0,45^{\frac{1}{10}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,9233$ ✓
- **Taux annuel** :

$\approx -7,67\%$

- **Vérification** : $0,9233^{10} \approx 0,4500$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Piège** : $\frac{55}{10} = 5,5\%$ ✓
- **Contrôle** : $0,945^{10} \approx 0,5680$ ✓
- **Réduction** : seulement 43 % ✓
- **Insuffisant** ✓

b) **Coefficient sur 5 ans** : $0,9233^5$ ✓

- **Autre écriture** : $0,45^{0,5}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,6708$ ✓
- **Émissions** : $850 \times 0,6708$ ✓
- **Valeur** :

≈ 570 tonnes

- **Réduction à mi-parcours** : $\approx 32,9\%$ ✓
- **Remarque** : ce n'est pas la moitié de 55 % ✓
- **Explication** : les baisses se composent ✓
- **Émissions à l'échéance** : ≈ 383 tonnes ✓
- **Contrôle** : $850 \times 0,45$ ✓

Réponse. a) $\approx -7,67\%$ par an · b) ≈ 570 tonnes.

Correction de l'exercice 14 - Croissance et inflation

a) **Coefficient nominal** : 1,05 ✓

— **Coefficient des prix** : 1,03 ✓

— **Quotient** : $\frac{1,05}{1,03}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,01942$ ✓

— **Croissance réelle** :

$$\approx +1,94 \% \text{ par an}$$

— **Piège** : $5 - 3 = 2 \%$ ✓

— **Écart** : faible, mais réel ✓

b) **Sur dix ans** : $1,01942^{10}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,2121$ ✓

— **Croissance réelle** :

$$\approx +21,21 \%$$

— **Contrôle** : $\frac{1,05^{10}}{1,03^{10}}$ ✓

— **Numérateur** : $\approx 1,6289$ ✓

— **Dénominateur** : $\approx 1,3439$ ✓

— **Quotient** : $\approx 1,2121$ ✓

— **Concordance à l'arrondi près** ✓

— **Croissance nominale sur dix ans** : $\approx +62,89 \%$ ✓

— **Différence avec le réel** : ≈ 42 points ✓

— **Interprétation** : une bonne part de la hausse n'est qu'inflation ✓

— **Temps de doublement réel** : $\frac{70}{1,94} \approx 36$ ans ✓

— **Temps de doublement nominal** : ≈ 14 ans ✓

— **Leçon** : toujours déflater avant de juger une croissance ✓

Réponse. a) $\approx +1,94 \%$ · b) $\approx +21,21 \%$ sur dix ans.

Correction de l'exercice 15 - Deux stratégies d'épargne

a) **Première stratégie** : 20 ans de placement ✓

— **Coefficient** : $1,04^{20}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 2,1911$ ✓

— **Capital** : $8000 \times 2,1911$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 17\,529 \text{ €}$$

— **Seconde stratégie** : 15 ans de placement ✓

— **Coefficient** : $1,04^{15}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,8009$ ✓

— **Capital** : $10\,000 \times 1,8009$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 18\,009 \text{ €}$$

b) **Comparaison** : $18\,009 > 17\,529$ ✓

- **Écart** : ≈ 480 € ✓
- **Meilleure stratégie** : la **seconde** ✓
- **Mais l'écart est mince** ✓
- **Rapport des mises** : 1,25 ✓
- **Rapport des durées** : 5 ans de moins ✓
- **Coefficient perdu** : $1,04^5 \approx 1,2167$ ✓
- **Comparaison** : $1,25 > 1,2167$ ✓
- **C'est exactement pourquoi la seconde l'emporte** ✓
- **Mise d'équivalence** : $8000 \times 1,2167$ ✓
- **Valeur** : ≈ 9734 € ✓
- **Lecture** : au-delà de 9734 €, attendre est gagnant ✓
- **Réserve** : encore faut-il disposer de la somme ✓

Réponse. a) $\approx 17\,529$ € contre $\approx 18\,009$ € · b) la seconde, de peu.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un plan à dix ans

a) **Coefficient visé** : 1,5 ✓

- **Relation** : $q^{10} = 1,5$ ✓
- **Isolement** : $q = 1,5^{\frac{1}{10}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0414$ ✓
- **Taux nominal** :
 $\approx +4,14\%$ par an

b) **Coefficient des prix sur 10 ans** : $1,02^{10}$ ✓

- **Valeur** : $\approx 1,2190$ ✓
- **Coefficient réel** : $\frac{1,5}{1,2190}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,2305$ ✓
- **Hausse réelle** :
 $\approx +23,05\%$

- **Conclusion** : oui, mais bien moindre ✓
- **Une bonne moitié de la hausse est absorbée par l'inflation** ✓

c) **Objectif réel** : coefficient 1,5 en euros constants ✓

- **Coefficient nominal nécessaire** : $1,5 \times 1,2190$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,8285$ ✓
- **Taux annuel** : $1,8285^{\frac{1}{10}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0622$ ✓
- **Taux nominal** :
 $\approx +6,22\%$ par an

- **Budget final** : $2 \times 1,8285$ ✓
- **Valeur** : $\approx 3,66$ millions ✓
- **Contre** : 3 millions dans le cas a) ✓
- **Écart** : $\approx 0,66$ million ✓

Réponse. a) $\approx +4,14\%$ · b) oui, mais seulement $\approx +23,05\%$ en réel · c) $\approx +6,22\%$.