

Plaquette 1 - Fonctions $x \mapsto q^x$: calculs, variations, modèles

Fonction exponentielle — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Règles de calcul, pour $q > 0$:

$$q^a \times q^b = q^{a+b} \quad \frac{q^a}{q^b} = q^{a-b} \quad (q^a)^b = q^{ab} \quad q^0 = 1 \quad q^{-a} = \frac{1}{q^a}$$

— $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ et, plus généralement, $q^{\frac{1}{n}}$ est la racine n -ième de q .

— **Sens de variation** de $x \mapsto q^x$:

— si $q > 1$, la fonction est **croissante** (croissance exponentielle) ;

— si $0 < q < 1$, elle est **décroissante** ;

— si $q = 1$, elle est constante égale à 1.

— $q^x > 0$ pour tout réel x : une exponentielle ne s'annule jamais et ne change pas de signe.

— **Modélisation** : une grandeur valant V_0 et évoluant de $t\%$ par période vaut $V(x) = V_0 \times q^x$ avec $q = 1 + \frac{t}{100}$, où x est le nombre de périodes (éventuellement non entier).

— Taux moyen sur n périodes : $1 + t_m = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$.

— Recherche d'un seuil : on encadre par balayage (tableau de valeurs), en utilisant la monotonie.

Correction de l'exercice 1 - Calculs de puissances

On applique les règles du cours.

a) $2^5 \times 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8.$

b) $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27.$

c) $(1,5^2)^3 = 1,5^6 = 11,390\,625.$

d) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3.$

Réponse. a) 8 · b) 27 · c) $1,5^6 = 11,390\,625$ · d) 3.

Correction de l'exercice 2 - Sens de variation

On compare la base q à 1.

— a) $q = 1,4 > 1$: la fonction est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

— b) $q = 0,75$ avec $0 < q < 1$: la fonction est **décroissante** ; ses valeurs se rapprochent de 0 quand x augmente.

— c) $q = 1,02 > 1$ et le coefficient 5 est positif : la fonction est **croissante**.

— À retenir : multiplier par une constante positive ne change pas le sens de variation.

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) croissante.

Correction de l'exercice 3 - Calculer des images

- $f(0) = 1\,200 \times 1,03^0 = 1\,200 \times 1 = 1\,200$ (toute exponentielle vaut 1 en 0).
- $f(5) = 1\,200 \times 1,03^5$. Or $1,03^5 \approx 1,159\,274$, donc $f(5) \approx 1\,391,13$.
- $f(-2) = 1\,200 \times 1,03^{-2} = \frac{1\,200}{1,03^2} = \frac{1\,200}{1,0609} \approx 1\,131,12$.
- Interprétation : avec un placement à 3 %, $f(-2)$ est le capital qu'il fallait avoir **deux ans avant** pour obtenir 1 200 € aujourd'hui.

Réponse. 1 200 ; $\approx 1\,391,13$; $\approx 1\,131,12$.

Correction de l'exercice 4 - Modéliser une croissance

- a) Hausse de 6 % : coefficient $q = 1,06$, donc

$$U(x) = 50\,000 \times 1,06^x$$

- b) $1,06^8 \approx 1,593\,848$, donc $U(8) \approx 79\,692$ utilisateurs.

- c) $1,06^{0,5} = \sqrt{1,06} \approx 1,029\,563$, donc $U(0,5) \approx 51\,478$.

- Interprétation : au bout d'un **demi-mois**, l'application compte environ 51 478 utilisateurs. C'est l'intérêt de la fonction exponentielle : elle permet de calculer pour une durée non entière, ce que ne permet pas une suite.

Réponse. a) $U(x) = 50\,000 \times 1,06^x$ · b) $\approx 79\,692$ · c) $\approx 51\,478$ au bout d'un demi-mois.

Correction de l'exercice 5 - Modéliser une décroissance

- a) Baisse de 22 % : $q = 0,78$, donc $V(x) = 9\,000 \times 0,78^x$.

- b) $0,78^3 = 0,474\,552$, donc $V(3) \approx 4\,271$ €.

- c) Non : $0,78^x > 0$ pour tout réel x , donc $V(x) > 0$.

- La valeur se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre : c'est une propriété fondamentale des exponentielles.

Réponse. a) $V(x) = 9\,000 \times 0,78^x$ · b) $\approx 4\,271$ € · c) non, elle reste strictement positive.

Correction de l'exercice 6 - Taux équivalent

- a) Un an compte 12 mois : on cherche q tel que $q^{12} = 1,09$, donc

$$q = 1,09^{\frac{1}{12}} \approx 1,007\,21$$

- b) $q = 1 + t$ donne $t \approx 0,007\,21$, soit environ 0,72 % **par mois**.

- Contrôle : $1,007\,21^{12} \approx 1,09$. Cohérent.

- Remarque : $\frac{9}{12} = 0,75$ % donnerait un résultat proche mais **faux**, car les intérêts se composent.

Réponse. a) $q \approx 1,007\,21$ · b) environ 0,72 % par mois.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre par balayage

On calcule chaque valeur avec $U(x) = 50\,000 \times 1,06^x$:

x	10	11	12	13
$U(x)$	89 542	94 915	100 610	106 646

- $1,06^{10} \approx 1,790\,85$; $1,06^{11} \approx 1,898\,30$; $1,06^{12} \approx 2,012\,20$; $1,06^{13} \approx 2,132\,93$.
- $U(11) \approx 94\,915 < 100\,000$ et $U(12) \approx 100\,610 > 100\,000$.
- La fonction étant **croissante**, le seuil est franchi entre 11 et 12 mois : le nombre d'utilisateurs dépasse 100 000 au bout de 12 **mois**.

Réponse. Au bout de 12 mois ($U(12) \approx 100\,610$).

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux exponentielles

a) $A(x) = 10\,000 \times 1,04^x$.

- $B(x) = 10\,300 \times 1,035^x$ (la prime est ajoutée au capital de départ).

b) Au bout de 5 ans :

- $A(5) = 10\,000 \times 1,04^5 \approx 12\,167$ €.
- $B(5) = 10\,300 \times 1,035^5 \approx 12\,233$ €. Le placement **B** est meilleur.

Au bout de 20 ans :

- $A(20) = 10\,000 \times 1,04^{20} \approx 21\,911$ €.
- $B(20) = 10\,300 \times 1,035^{20} \approx 20\,495$ €. Le placement **A** repasse devant.
- Explication : l'avantage de départ de B est rattrapé par le taux plus élevé de A, dont l'effet se compose année après année.

Réponse. b) À 5 ans : B ($\approx 12\,233$ € contre $\approx 12\,167$ €) · à 20 ans : A ($\approx 21\,911$ € contre $\approx 20\,495$ €).

Correction de l'exercice 9 - Demi-vie d'une décroissance

a) Le coefficient est 0,88 : on cherche x tel que $0,88^x = 0,5$.

x	4	5	6	7
$0,88^x$	0,5997	0,5277	0,4644	0,4087

- $0,88^5 \approx 0,5277 > 0,5$ et $0,88^6 \approx 0,4644 < 0,5$.
- Le stock est donc réduit de moitié entre la 5^e et la 6^e année, soit au bout de 6 **ans** si l'on compte en années entières.
- b) Non : l'équation $0,88^x = 0,5$ ne dépend pas du stock initial, qui se simplifie.
- C'est la notion de **demi-vie** : pour un taux de décroissance donné, la durée nécessaire pour diviser la quantité par 2 est toujours la même.

Réponse. a) au bout de 6 ans · b) non, la demi-vie ne dépend pas du stock initial.

Correction de l'exercice 10 - Problème : inflation et pouvoir d'achat

a) Les prix sont multipliés par $1,025^6$; le pouvoir d'achat est donc multiplié par l'inverse :

$$\frac{1}{1,025^6} = 1,025^{-6} \approx 0,862\,3$$

b) $2\,200 \times 0,862\,3 \approx 1\,897,05$ €.

- Interprétation : sans augmentation, le salaire perd environ 13,8 % de pouvoir d'achat en 6 ans — il « vaut » 1 897 € d'aujourd'hui.
- Pour maintenir le pouvoir d'achat, il faudrait une hausse annuelle de 2,5 %, soit un salaire de $2\,200 \times 1,025^6 \approx 2\,551,33$ € au bout de 6 ans.

Réponse. a) $\approx 0,862\,3$ · b) environ 1 897,05 € (perte d'environ 13,8 %).

Correction de l'exercice 11 – Synthèse : trois questions enchaînées

- a) Baisse de 8 % : $q = 0,92$, donc $E(x) = 18\,000 \times 0,92^x$.
- b) $0,92^5 \approx 0,659\,082$, donc $E(5) \approx 11\,863$ tonnes.
- c) $0,92^8 \approx 0,513\,219$, donc $E(8) \approx 9\,238$ tonnes.
- $9\,238 > 9\,000$: l'objectif **n'est pas** tout à fait atteint en 8 ans.
 - En poursuivant : $E(9) \approx 8\,499$ tonnes. Il faut donc 9 ans pour passer sous les 9 000 tonnes.
 - Remarque : diviser par 2 avec -8% par an demande un peu plus de 8 ans, conformément à la notion de demi-vie.

Réponse. a) $E(x) = 18\,000 \times 0,92^x$ · b) $\approx 11\,863$ t · c) non ($\approx 9\,238$ t) ; il faut 9 ans.