

Plaquette 2 - Puissances et règles de calcul

Fonction exponentielle — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq règles. Pour $q > 0$:

$$q^a \times q^b = q^{a+b} \quad \frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}$$

$$(q^a)^b = q^{ab} \quad q^0 = 1 \quad q^{-a} = \frac{1}{q^a}$$

Exposants fractionnaires.

Écriture	Sens
$q^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{q}$
$q^{\frac{1}{3}}$	la racine cubique de q
$q^{\frac{1}{n}}$	la racine n -ième de q
$q^{\frac{p}{n}}$	la racine n -ième de q , élevée à la puissance p

Signe. $q^x > 0$ pour tout réel x : une exponentielle ne s'annule jamais.

Deux applications directes.

Taux **global** sur n périodes à taux t :

$$CM = (1 + t)^n$$

Taux **par période** correspondant à un taux global :

$$1 + t_m = CM^{\frac{1}{n}}$$

⚠ $q^a \times q^b$ n'est **pas** q^{ab} : on **ajoute** les exposants dans un produit.

⚠ q^{-a} n'est pas négatif : c'est un **inverse**.

Correction de l'exercice 1 - Produits et quotients

a) **Règle** : on ajoute les exposants ✓

— **Calcul** : $3 + 4$ ✓

— **Résultat** :

$$2^7 = 128$$

b) **Règle** : on soustrait les exposants ✓

— **Calcul** : $5 - 2$ ✓

— **Résultat** :

$$3^3 = 27$$

c) **Règle** : on multiplie les exposants ✓

— **Calcul** : 2×3 ✓

— **Résultat** :

$$5^6 = 15\,625$$

d) **Règle** : on ajoute ✓

— **Calcul** : $4 + 6$ ✓

— **Résultat** :

$$1,05^{10}$$

— **Valeur approchée** : $\approx 1,6289$ ✓

— **Interprétation financière** : quatre ans puis six ans de placement ✓

— **Piège de a)** : répondre 2^{12} ✓

— **Pourquoi c'est faux** : c'est la règle de la puissance de puissance ✓

— **Contrôle de a)** : $8 \times 16 = 128$ ✓

— **Contrôle de b)** : $\frac{243}{9} = 27$ ✓

— **Contrôle de c)** : $25^3 = 15\,625$ ✓

Réponse. a) $2^7 = 128$ · b) $3^3 = 27$ · c) $5^6 = 15\,625$ · d) $1,05^{10}$.

Correction de l'exercice 2 - Exposants négatifs

a) **Règle** : $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$ ✓

— **Écriture** : $\frac{1}{2^3}$ ✓

— **Valeur** :

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

— **Remarque** : le résultat est **positif** ✓

b) **Écriture** : $\frac{1}{1,05^2}$ ✓

— **Dénominateur** : 1,1025 ✓

— **Valeur** :

$$\approx 0,907$$

— **Interprétation** : le coefficient qui **annule** deux hausses de 5 % ✓

c) **Règle du quotient** : $3 - 7$ ✓

— **Résultat** :

$$1,04^{-4}$$

— **Autre écriture** : $\frac{1}{1,04^4}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,8548$ ✓

d) **Règle** : $q^{-1} = \frac{1}{q}$ ✓

— **Interprétation** : l'évolution **réciproque** ✓

— **Exemple avec** $q = 1,25$: $q^{-1} = 0,8$ ✓

— **Traduction** : +25 % puis -20 % ✓

— **Contrôle** : $1,25 \times 0,8 = 1$ ✓

— **Piège** : croire que 2^{-3} vaut -8 ✓

— **Pourquoi c'est faux** : une puissance de base positive reste positive ✓

— **Contrôle de c)** : $\frac{1,1249}{1,3159} \approx 0,8548$ ✓

Réponse. a) $0,125$ · b) $\approx 0,907$ · c) $1,04^{-4} \approx 0,8548$ · d) $\frac{1}{q}$.

Correction de l'exercice 3 - Exposants fractionnaires

a) **Sens** : la racine carrée ✓

— **Calcul** : $\sqrt{49}$ ✓

— **Valeur** :

7

— **Contrôle** : $7^2 = 49$ ✓

b) **Sens** : la racine cubique ✓

— **Question** : quel nombre au cube donne 8 ? ✓

— **Valeur** :

2

— **Contrôle** : $2^3 = 8$ ✓

c) **Sens** : la racine quatrième ✓

— **Valeur** : 2 ✓

— **Contrôle** : $2^4 = 16$ ✓

d) **Sens** : la racine cinquième ✓

— **Valeur** :

2

— **Contrôle** : $2^5 = 32$ ✓

— **Règle générale** : $q^{\frac{1}{n}}$ est la racine n -ième ✓

— **À la calculatrice** : touche puissance et exposant $\frac{1}{n}$ ✓

— **Application au taux moyen** : $CM^{\frac{1}{n}}$ ✓

— **Exemple, +21 % en deux ans** : $1,21^{\frac{1}{2}}$ ✓

— **Valeur** : 1,1 ✓

— **Taux moyen** : +10 % ✓

— **Exemple, +33,1 % en trois ans** : $1,331^{\frac{1}{3}}$ ✓

— **Valeur** : 1,1 ✓

Réponse. a) 7 · b) 2 · c) 2 · d) 2.

Correction de l'exercice 4 - Calculer des images

a) **Calcul de $f(7)$** : $1,04^7$ ✓

— **Valeur** :

$\approx 1,3159$

— **Interprétation** : +31,59 % en sept périodes ✓

— **Calcul de $f(0)$** : $1,04^0$ ✓

— **Règle** : toute puissance 0 vaut 1 ✓

— **Valeur** :

1

— **Interprétation** : aucune évolution ✓

b) **Calcul de $g(5)$** : $0,92^5$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 0,6591$$

— **Interprétation** : $-34,09\%$ en cinq périodes ✓

— **Calcul de $g(-1)$** : $0,92^{-1}$ ✓

— **Écriture** : $\frac{1}{0,92}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0870$ ✓

— **Interprétation** : l'évolution réciproque d'une baisse de 8% ✓

— **Soit** : $\approx +8,70\%$ ✓

— **Contrôle** : $0,92 \times 1,087 \approx 1$ ✓

— **Signe des deux fonctions** : toujours positif ✓

— **Point commun aux deux courbes** : elles passent par $(0; 1)$ ✓

— **Variations de f** : croissante, car $1,04 > 1$ ✓

— **Variations de g** : décroissante, car $0,92 < 1$ ✓

Réponse. a) $\approx 1,3159$ et $1 \cdot$ b) $\approx 0,6591$ et $\approx 1,0870$.

Correction de l'exercice 5 - Du taux annuel au taux mensuel

a) **Coefficient annuel** : $1,08$ ✓

— **Nombre de mois** : 12 ✓

— **Relation** : $q^{12} = 1,08$ ✓

— **Isolement** : $q = 1,08^{\frac{1}{12}}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0064$ ✓

— **Taux mensuel** :

$$\approx +0,64\%$$

b) **Vérification** : $1,0064^{12}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0796$ ✓

— **Comparaison à $1,08$** : concordance à l'arrondi près ✓

— **Piège** : $\frac{8}{12} \approx 0,67\%$ ✓

— **Contrôle** : $1,0067^{12} \approx 1,0834$ ✓

— **Écart** : trop élevé ✓

— **Règle** : un taux par période se **divise** au sens des puissances ✓

— **Autrement dit** : on prend la racine, pas le quotient ✓

— **Application, taux trimestriel** : $1,08^{\frac{1}{4}}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0194$ ✓

— **Soit** : $\approx +1,94\%$ ✓

— **Contrôle** : $1,0194^4 \approx 1,0799$ ✓

— **Taux semestriel** : $1,08^{0,5} \approx 1,0392$ ✓

— **Soit** : $\approx +3,92\%$ ✓

Réponse. a) $\approx +0,64\%$ par mois · b) $1,0064^{12} \approx 1,0796$.

Correction de l'exercice 6 – Simplifier des expressions

a) **Numérateur** : q^{5+3} ✓

— **Valeur** : q^8 ✓

— **Quotient** : q^{8-6} ✓

— **Résultat** :

$$q^2$$

b) **Première puissance** : $q^{2 \times 4}$ ✓

— **Valeur** : q^8 ✓

— **Produit** : $q^{8+(-5)}$ ✓

— **Résultat** :

$$q^3$$

c) **Quotient** : $q^{-2-(-6)}$ ✓

— **Calcul de l'exposant** : $-2 + 6$ ✓

— **Résultat** :

$$q^4$$

— **Contrôle numérique avec $q = 2$, a)** : $\frac{32 \times 8}{64} = 4$ ✓

— **Concordance avec 2^2** ✓

— **Contrôle de b)** : $256 \times \frac{1}{32} = 8$ ✓

— **Concordance avec 2^3** ✓

— **Contrôle de c)** : $\frac{0,25}{0,015625} = 16$ ✓

— **Concordance avec 2^4** ✓

— **Piège de c)** : soustraire les valeurs absolues ✓

— **Bonne méthode** : appliquer la règle avec les signes ✓

Réponse. a) q^2 · b) q^3 · c) q^4 .

Correction de l'exercice 7 – Comparer des puissances

a) **Base** : $1,03 > 1$ ✓

— **La fonction est croissante** ✓

— **Comparaison des exposants** : $10 < 12$ ✓

— **Conclusion** :

$$1,03^{10} < 1,03^{12}$$

b) **Base** : $0,95 < 1$ ✓

— **La fonction est décroissante** ✓

— **Comparaison des exposants** : $4 < 7$ ✓

— **L'ordre s'inverse** ✓

— **Conclusion** :

$$0,95^4 > 0,95^7$$

c) **Bases différentes** : on ne peut pas conclure sans calcul ✓

— **Calcul de $1,03^{10}$** : $\approx 1,3439$ ✓

— **Calcul de $1,05^6$** : $\approx 1,3401$ ✓

— **Comparaison** :

$$1,03^{10} > 1,05^6$$

— **Écart** : très faible ✓

— **Interprétation** : dix ans à 3 % battent de peu six ans à 5 % ✓

— **Règle utilisable** : même base, on compare les exposants ✓

— **Même exposant** : on compare les bases ✓

— **Exemple** : $1,2^4 > 1,1^4$ ✓

— **Contrôle** : $2,0736 > 1,4641$ ✓

— **Ni l'un ni l'autre** : il faut calculer ✓

Réponse. a) $<$ · b) $>$ · c) $1,03^{10} \approx 1,3439$ dépasse $1,05^6 \approx 1,3401$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre une équation simple

a) **On reconnaît** : $8 = 2^3$ ✓

— **Égalité des exposants** ✓

— **Solution** :

$$x = 3$$

b) **On reconnaît** : $1 = 1,05^0$ ✓

— **Solution** :

$$x = 0$$

— **Interprétation** : aucune période écoulée ✓

c) **Inconnue** : la **base**, pas l'exposant ✓

— **Méthode** : prendre la racine cubique ✓

— **Calcul** : $1,331^{\frac{1}{3}}$ ✓

— **Valeur** :

$$q = 1,1$$

— **Contrôle** : $1,1^3 = 1,331$ ✓

— **Interprétation** : un taux de +10 % par période ✓

— **Différence entre b) et c)** ✓

— **En b)** : l'inconnue est l'exposant ✓

— **En c)** : l'inconnue est la base ✓

— **Méthode pour une base inconnue** : racine n -ième ✓

— **Méthode pour un exposant inconnu** : balayage ou logarithme ✓

— **Exemple de balayage** : $1,06^x = 1,5$ ✓

— **Test $x = 6$** : $\approx 1,4185$ ✓

— **Test $x = 7$** : $\approx 1,5036$ ✓

— **Encadrement** : entre 6 et 7 ✓

Réponse. a) $x = 3$ · b) $x = 0$ · c) $q = 1,1$.

Correction de l'exercice 9 - Décomposer un exposant

— **Décomposition de l'exposant** : $18 = 12 + 6$ ✓

— **Règle du produit** : $1,06^{18} = 1,06^{12} \times 1,06^6$ ✓

- **Valeur de $1,06^{12}$** : $\approx 2,0122$ ✓
- **Valeur de $1,06^6$** : $\approx 1,4185$ ✓
- **Produit** : $2,0122 \times 1,4185$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 2,8543$
- **Contrôle direct** : $1,06^{18} \approx 2,8543$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Autre décomposition** : $18 = 2 \times 9$ ✓
- **Règle de la puissance** : $(1,06^9)^2$ ✓
- **Valeur de $1,06^9$** : $\approx 1,6895$ ✓
- **Carré** : $\approx 2,8544$ ✓
- **Concordance à l'arrondi près** ✓
- **Interprétation** : 18 ans à 6 % multiplient par $\approx 2,85$ ✓
- **Soit** : $\approx +185\%$ ✓
- **Temps de doublement** : environ 12 ans ✓
- **Contrôle** : $1,06^{12} \approx 2,0122$ ✓
- **Utilité de la décomposition** : calculer de tête à partir de repères ✓
- **Repère utile** : le doublement tous les 12 ans à 6 % ✓

Réponse. $1,06^{18} = 1,06^{12} \times 1,06^6 \approx 2,8543$.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

- **Première erreur** : il a multiplié les exposants ✓
- **Règle correcte pour un produit** : on les **ajoute** ✓
- **Calcul** : $3 + 4$ ✓
- **Résultat correct** :
 $1,05^7$
- **Valeur** : $\approx 1,4071$ ✓
- **Ce que donnait sa réponse** : $1,05^{12} \approx 1,7959$ ✓
- **Écart** : considérable ✓
- **Quand multiplie-t-on les exposants** : pour une puissance de puissance ✓
- **Écriture concernée** : $(1,05^3)^4$ ✓
- **Là** : $1,05^{12}$ est juste ✓
- **Seconde erreur** : le signe ✓
- **Règle** : $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{1}{1,1025}$ ✓
- **Résultat correct** :
 $\approx 0,907$
- **Signe** : positif ✓
- **Principe général** : une puissance de base positive est positive ✓
- **Ce que signifie l'exposant négatif** : un inverse, pas un opposé ✓
- **Interprétation** : remonter deux périodes en arrière ✓

— **Contrôle** : $1,1025 \times 0,907 \approx 1$ ✓

Réponse. $1,05^3 \times 1,05^4 = 1,05^7 \approx 1,4071$; $1,05^{-2} \approx 0,907$, positif.

Correction de l'exercice 11 - Encadrer une puissance

— **Croissance de la fonction** : $1,07 > 1$ ✓

— **Ordre des exposants** : $9 < 10 < 11$ ✓

— **Ordre des images** : conservé ✓

— **Encadrement** : $1,8385 < 1,07^{10} < 2,1049$ ✓

— **Encadrement par des entiers** :

$$1 < 1,07^{10} < 3$$

— **Meilleur encadrement** : entre 1,8 et 2,2 ✓

— **Valeur exacte** : $\approx 1,9672$ ✓

— **Contrôle** : elle est bien entre les deux ✓

— **Autre méthode** : $1,07^{10} = 1,07^9 \times 1,07$ ✓

— **Calcul** : $1,8385 \times 1,07$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,9672$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Ou encore** : $\frac{1,07^{11}}{1,07}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{2,1049}{1,07}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,9672$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Interprétation** : dix ans à 7 % ne doublent pas tout à fait ✓

— **Année du doublement** : la onzième ✓

— **Contrôle** : $2,1049 > 2$ ✓

— **Règle des 70** : $\frac{70}{7} = 10$ ✓

Réponse. $1,8385 < 1,07^{10} < 2,1049$, valeur exacte $\approx 1,9672$.

Correction de l'exercice 12 - Un placement

a) **Coefficient annuel** : 1,045 ✓

— **Expression** :

$$C(x) = 12\,000 \times 1,045^x$$

b) **Calcul de $1,045^7$** : $\approx 1,3609$ ✓

— **Produit** : $12\,000 \times 1,3609$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 16\,330,34 \text{ €}$$

— **Intérêts gagnés** : $\approx 4\,330,34 \text{ €}$ ✓

— **En pourcentage** : $\approx +36,09\%$ ✓

c) **Six mois** : $x = 0,5$ ✓

— **Calcul** : $1,045^{0,5}$ ✓

— **Autre écriture** : $\sqrt{1,045}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0223$ ✓

- **Capital** : $12\,000 \times 1,0223$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 12\,267,03 \text{ €}$

- **Intérêts** : $\approx 267,03 \text{ €}$ ✓
- **Piège** : prendre la moitié de 4,5 % ✓
- **Ce que cela donnerait** : $12\,270 \text{ €}$ ✓
- **Écart** : $2,97 \text{ €}$ ✓
- **Explication** : les intérêts se composent ✓
- **Contrôle** : $1,0223^2 \approx 1,0449$ ✓
- **Concordance avec 1,045 à l'arrondi près** ✓

Réponse. a) $12\,000 \times 1,045^x$ · b) $\approx 16\,330,34 \text{ €}$ · c) $\approx 12\,267,03 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 13 – Une base à retrouver

- **Coefficient global** : $0,5$ ✓
- **Relation** : $q^8 = 0,5$ ✓
- **Isolement** : $q = 0,5^{\frac{1}{8}}$ ✓
- **Calcul** : $0,5^{0,125}$ ✓
- **Valeur** :
 $q \approx 0,9170$
- **Taux** : $q - 1$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx -8,30 \text{ % par an}$

- **Vérification** : $0,917^8$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,5$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Piège** : $\frac{-50}{8} = -6,25 \text{ %}$ ✓
- **Contrôle** : $0,9375^8 \approx 0,5967$ ✓
- **Écart** : la baisse serait moindre ✓
- **Vocabulaire** : 8 ans est la **demi-vie** ✓
- **Population au bout de 16 ans** : divisée par 4 ✓
- **Contrôle** : $0,5^2 = 0,25$ ✓
- **Population au bout de 4 ans** : $0,5^{0,5} \approx 0,7071$ ✓
- **Soit** : $\approx -29,29 \text{ %}$ ✓
- **Règle des 70** : $\frac{70}{8,3} \approx 8,4$ ✓
- **Concordance approximative** ✓

Réponse. a) $q \approx 0,9170$ · b) environ $-8,30 \text{ % par an}$.

Correction de l'exercice 14 – Positivité de l'exponentielle

- a) **Propriété** : $q^x > 0$ pour tout x ✓
- **Conclusion** :
aucune solution
- **Interprétation graphique** : la courbe ne coupe jamais l'axe ✓

- **Comportement pour x très négatif** : elle s'en approche ✓
- **Contrôle** : $1,08^{-50} \approx 0,0213$ ✓
- **Et** : $1,08^{-100} \approx 0,00045$ ✓
- **Elle tend vers 0 sans l'atteindre** ✓

b) **Un nombre négatif** ✓

- **Même raison** ✓
- **Conclusion** :

aucune solution

c) **Valeur visée** : strictement positive ✓

- **Elle est inférieure à 1** ✓
- **La fonction vaut 1 en 0** ✓
- **Elle est croissante** ✓
- **Donc la solution est négative** ✓
- **Balayage**, $x = -9$: $\approx 0,5002$ ✓
- **Balayage**, $x = -10$: $\approx 0,4632$ ✓
- **Solution** :

entre -10 et -9

- **Interprétation** : il y a neuf ans, le capital valait la moitié ✓
- **Lien avec la demi-vie** : $\frac{70}{8} \approx 8,75$ ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. a) et b) aucune solution · c) une solution, entre -10 et -9 .

Correction de l'exercice 15 - Convertir dans les deux sens

a) **Coefficient global** : $0,85$ ✓

- **Relation** : $q^3 = 0,85$ ✓
- **Isolement** : $q = 0,85^{\frac{1}{3}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,9473$ ✓
- **Taux** :

$\approx -5,27\%$ par an

- **Vérification** : $0,9473^3 \approx 0,85$ ✓
- **Concordance** ✓

b) **Coefficient sur dix ans** : $0,9473^{10}$ ✓

- **Autre écriture** : $\left(0,85^{\frac{1}{3}}\right)^{10}$ ✓
- **Simplification** : $0,85^{\frac{10}{3}}$ ✓
- **Valeur** :

$\approx 0,5817$

- **Taux global** : $\approx -41,83\%$ ✓
- **Piège** : $\frac{10}{3} \times (-15) = -50\%$ ✓
- **Écart** : 8 points ✓
- **Explication** : les baisses se composent ✓

- **Contrôle par étapes, trois ans** : 0,85 ✓
- **Six ans** : 0,7225 ✓
- **Neuf ans** : $\approx 0,6141$ ✓
- **Dixième année** : $\times 0,9473$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,5817$ ✓
- **Concordance à l'arrondi près** ✓
- **Année de la division par deux** : $\frac{70}{5,27} \approx 13$ ✓

Réponse. a) $\approx -5,27\%$ par an · b) $\approx 0,5817$, soit $\approx -41,83\%$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre conversions

a) **Coefficient annuel** : 1,024 ✓

— **Sur cinq ans** : $1,024^5$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 1,1259$$

— **Taux** : $\approx +12,59\%$ ✓

b) **Relation** : $q^{12} = 1,024$ ✓

— **Isolement** : $q = 1,024^{\frac{1}{12}}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,00198$ ✓

— **Taux mensuel** :

$$\approx +0,198\%$$

— **Vérification** : $1,00198^{12} \approx 1,0240$ ✓

c) **Six mois** : $x = 0,5$ ✓

— **Calcul** : $1,024^{0,5}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,0119$ ✓

— **Taux** :

$$\approx +1,19\%$$

— **Contrôle** : $1,0119^2 \approx 1,0239$ ✓

d) **Objectif** : $1,024^x \geq 1,3$ ✓

— **Test** $x = 10$: $\approx 1,2677$ ✓

— **Insuffisant** ✓

— **Test** $x = 11$: $\approx 1,2981$ ✓

— **Toujours insuffisant** ✓

— **Test** $x = 12$: $\approx 1,3292$ ✓

— **Objectif atteint** ✓

— **Réponse** :

$$12 \text{ ans}$$

— **Loyer initial de 800 €** : $\approx 1063,38$ € ✓

Réponse. a) $\approx 1,1259$ · b) $\approx +0,198\%$ · c) $\approx +1,19\%$ · d) 12 ans.