

Plaquette 3 – Variations, comparaisons et balayage

Fonction exponentielle – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sens de variation de $x \mapsto q^x$.

Valeur de q	Variation	Allure
$q > 1$	croissante	croissance exponentielle
$0 < q < 1$	décroissante	elle tend vers 0
$q = 1$	constante	égale à 1

Toutes ces courbes passent par le point $(0 ; 1)$ et restent **strictement positives**.

Comparer deux puissances.

Situation	Méthode
même base	comparer les exposants (en tenant compte du sens)
même exposant	comparer les bases
ni l'un ni l'autre	calculer

Le balayage. On veut résoudre $q^x = k$ avec $q > 1$:

Étape	Ce qu'on fait
1	tester des entiers jusqu'à encadrer k
2	affiner au dixième si l'énoncé le demande
3	conclure avec la monotonie (une seule solution)

Comparer deux modèles. Pour $A \times a^x$ et $B \times b^x$, on peut regrouper :

$$\frac{A \times a^x}{B \times b^x} = \frac{A}{B} \times \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Croissance comparée. Une exponentielle de base > 1 finit **toujours** par dépasser une croissance linéaire, même partie de beaucoup plus bas.

Correction de l'exercice 1 – Sens de variation

a) **Base** : $1,12 > 1$ ✓

— **Conclusion** :

croissante

— **Contrôle** : $f(0) = 1$ et $f(1) = 1,12$ ✓

b) **Base** : $0,88 < 1$ ✓

— **Conclusion** :

décroissante

— **Contrôle** : $g(0) = 1$ et $g(1) = 0,88$ ✓

c) **Base** : $0,97 < 1$ ✓

- **Coefficient** : $3 > 0$ ✓
- **Il ne change pas le sens** ✓
- **Conclusion** : décroissante ✓
- **Contrôle** : $h(0) = 3$ et $h(1) = 2,91$ ✓

d) **Base** : $2 > 1$ ✓

- **Coefficient** : $0,5 > 0$ ✓
- **Conclusion** :

croissante

- **Contrôle** : $k(0) = 0,5$ et $k(1) = 1$ ✓
- **Règle** : seul le signe de $q - 1$ compte ✓
- **Condition** : que le coefficient soit positif ✓
- **Si le coefficient était négatif** : le sens s'inverserait ✓
- **Exemple** : $-2 \times 1,5^x$ est décroissante ✓
- **Signe de toutes ces fonctions** : celui du coefficient ✓
- **Ici** : toutes positives ✓

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) décroissante · d) croissante.

Correction de l'exercice 2 - Comparer sans calculer

a) **Même base** : $1,09 > 1$ ✓

- **Fonction croissante** ✓
- **Exposants** : $7 < 9$ ✓
- **Conclusion** :

$$1,09^7 < 1,09^9$$

b) **Même base** : $0,92 < 1$ ✓

- **Fonction décroissante** ✓
- **Exposants** : $5 < 8$ ✓
- **L'ordre s'inverse** ✓
- **Conclusion** :

$$0,92^5 > 0,92^8$$

c) **Même exposant** : 6 ✓

- **Bases** : $1,2 < 1,3$ ✓
- **Exposant positif** : l'ordre est conservé ✓
- **Conclusion** :

$$1,2^6 < 1,3^6$$

d) **Même exposant** : 4 ✓

- **Bases** : $0,6 < 0,7$ ✓
- **Conclusion** : $0,6^4 < 0,7^4$ ✓
- **Contrôle** : $0,1296 < 0,2401$ ✓
- **Piège de b)** : oublier l'inversion ✓
- **Repère mnémotechnique** : une baisse répétée fait toujours descendre ✓
- **Donc plus d'exposant** : plus petit ✓
- **Contrôle de b)** : $0,6591 > 0,5132$ ✓

— **Contrôle de c)** : $2,9860 < 4,8268$ ✓

Réponse. a) $<$ · b) $>$ · c) $<$ · d) $0,6^4 < 0,7^4$.

Correction de l'exercice 3 - Résoudre par balayage

a) **La fonction est croissante** ✓

— **Il y a donc au plus une solution** ✓

— **Test** $x = 10$: $\approx 1,7908$ ✓

— **Trop petit** ✓

— **Test** $x = 11$: $\approx 1,8983$ ✓

— **Toujours trop petit** ✓

— **Test** $x = 12$: $\approx 2,0122$ ✓

— **Trop grand** ✓

— **Encadrement** :

$$11 < x < 12$$

b) **Test** $x = 11,5$: $\approx 1,9544$ ✓

— **Trop petit** ✓

— **Nouvel encadrement** : entre 11,5 et 12 ✓

— **Test** $x = 11,9$: $\approx 2,0005$ ✓

— **Très légèrement trop grand** ✓

— **Test** $x = 11,8$: $\approx 1,9889$ ✓

— **Trop petit** ✓

— **Solution** :

$$x \approx 11,9$$

— **Interprétation** : un capital double en environ 11,9 ans à 6 % ✓

— **Règle des 70** : $\frac{70}{6} \approx 11,7$ ✓

— **Concordance approximative** ✓

— **Justification de l'unicité** : la fonction est strictement croissante ✓

— **Conséquence** : elle ne prend chaque valeur qu'une fois ✓

Réponse. a) entre 11 et 12 · b) $x \approx 11,9$.

Correction de l'exercice 4 - Balayage sur une décroissance

a) **La fonction est décroissante** ✓

— **Test** $x = 5$: $\approx 0,5905$ ✓

— **Trop grand** ✓

— **Test** $x = 6$: $\approx 0,5314$ ✓

— **Toujours trop grand** ✓

— **Test** $x = 7$: $\approx 0,4783$ ✓

— **Trop petit** ✓

— **Encadrement** :

$$6 < x < 7$$

— **Affinage**, $x = 6,5$: $\approx 0,5042$ ✓

— **Encore un peu trop grand** ✓

— **Solution** : $x \approx 6,6$ ✓

b) **Interprétation** : la grandeur est divisée par deux ✓

— **Vocabulaire** :

demi-vie $\approx 6,6$ périodes

— **Contexte** : une baisse de 10 % par période ✓

— **Contrôle par la règle des 70** : $70 : \frac{70}{10} = 7$ ✓

— **Concordance approximative** ✓

— **Attention au sens de l'inégalité** ✓

— **Ici** : quand x grandit, la valeur **diminue** ✓

— **Donc** : dépasser 0,5 signifie descendre sous 0,5 ✓

— **Division par 4** : deux demi-vies ✓

— **Rang** : $\approx 13,2$ ✓

— **Contrôle** : $0,9^{13} \approx 0,2542$ ✓

— **Et** : $0,9^{14} \approx 0,2288$ ✓

Réponse. a) entre 6 et 7 · b) la demi-vie vaut environ 6,6 périodes.

Correction de l'exercice 5 - Deux modèles qui se croisent

a) **En** $x = 0$, **A** : 500 ✓

— **En** $x = 0$, **B** : 800 ✓

— **B est devant** ✓

— **En** $x = 8$, **A** : $500 \times 1,08^8$ ✓

— **Coefficient** : $\approx 1,8509$ ✓

— **Valeur** : $\approx 925,47$ ✓

— **En** $x = 8$, **B** : $800 \times 1,03^8$ ✓

— **Coefficient** : $\approx 1,2668$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1013,42$ ✓

— **B est encore devant** ✓

b) **Test** $x = 9$, **A** : $\approx 999,50$ ✓

— **B** : $\approx 1043,82$ ✓

— **B toujours devant** ✓

— **Test** $x = 10$, **A** : $\approx 1079,46$ ✓

— **B** : $\approx 1075,13$ ✓

— **A passe devant** ✓

— **Réponse** :

à partir de $x = 10$

— **Écart au rang 10** : $\approx 4,33$ ✓

— **Écart au rang 11** : $\approx 58,43$ ✓

— **Explication** : A a le taux le plus fort ✓

— **Règle** : le taux l'emporte toujours sur l'avance initiale ✓

— **Question de temps** : seulement ✓

— **Contrôle au rang 20**, **A** : $\approx 2330,48$ ✓

— **B** : $\approx 1444,89$ ✓

Réponse. a) B devant dans les deux cas · b) A dépasse B à partir de $x = 10$.

Correction de l'exercice 6 - Exponentielle contre linéaire

a) En $x = 10$, $A : 100 \times 1,05^{10} \checkmark$

— Coefficient : $\approx 1,6289 \checkmark$

— Valeur : $\approx 162,89 \checkmark$

— $B : 100 + 150 = 250 \checkmark$

— B est devant $\checkmark$

— En $x = 20$, $A : \approx 265,33 \checkmark$

— $B : 400 \checkmark$

— B encore devant $\checkmark$

— En $x = 30$, $A : \approx 432,19 \checkmark$

— $B : 550 \checkmark$

— B toujours devant $\checkmark$

b) Test $x = 38$, $A : \approx 638,55 \checkmark$

— $B : 670 \checkmark$

— B devant $\checkmark$

— Test $x = 39$, $A : \approx 670,48 \checkmark$

— $B : 685 \checkmark$

— B devant de peu $\checkmark$

— Test $x = 40$, $A : \approx 704 \checkmark$

— $B : 700 \checkmark$

— A passe devant $\checkmark$

— Réponse :

à partir de $x = 40$

— Constat : il a fallu 40 périodes $\checkmark$

— Règle générale : l'exponentielle finit toujours par l'emporter $\checkmark$

— Écart au rang 60, $A : \approx 1867,92 \checkmark$

— $B : 1000 \checkmark$

— L'écart se creuse alors très vite $\checkmark$

Réponse. a) B devant à chaque fois · b) A dépasse B à partir de $x = 40$.

Correction de l'exercice 7 - Lire un tableau de valeurs

a) Quotient entre deux valeurs espacées de 2 $\checkmark$

— Calcul : $\frac{242}{200} \checkmark$

— Valeur : 1,21 $\checkmark$

— Calcul suivant : $\frac{292,82}{242} \checkmark$

— Valeur : 1,21 $\checkmark$

— Calcul suivant : $\frac{354,31}{292,82} \checkmark$

— Valeur : $\approx 1,21 \checkmark$

— Tous égaux $\checkmark$

— Conclusion : le modèle est bien exponentiel $\checkmark$

b) Relation : $q^2 = 1,21 \checkmark$

— **Racine carrée** : $\sqrt{1,21}$ ✓

— **Valeur** :

$$q = 1,1$$

— **Taux par période** :

$$+10\%$$

— **Contrôle** : $200 \times 1,1^2 = 242$ ✓

— **Contrôle** : $200 \times 1,1^4 = 292,82$ ✓

— **Contrôle** : $200 \times 1,1^8 \approx 428,72$ ✓

— **Concordance à l'arrondi près** ✓

— **Valeur manquante en** $x = 1$: 220 ✓

— **Valeur en** $x = 3$: 266,2 ✓

— **Piège** : voir un modèle affine ✓

— **Différences** : 42 ; 50,82 ; 61,49 ✓

— **Elles augmentent** : ce n'est pas affine ✓

Réponse. a) les quotients sont constants · b) $q = 1,1$, soit +10 % par période.

Correction de l'exercice 8 - Croissance à long terme

a) **Calcul de** $f(50)$: $1,02^{50}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 2,6916$ ✓

— **Calcul de** $f(100)$: $1,02^{100}$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 7,2446$$

— **Calcul de** $f(200)$: $1,02^{200}$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 52,5$$

b) **Observation** : $f(100)$ n'est pas le double de $f(50)$ ✓

— **Rapport** : $\approx 2,69$ ✓

— **Explication** : c'est $f(50)$ lui-même ✓

— **Raison** : $1,02^{100} = \left(1,02^{50}\right)^2$ ✓

— **Contrôle** : $2,6916^2 \approx 7,2447$ ✓

— **De même** : $f(200) = f(100)^2$ ✓

— **Contrôle** : $7,2446^2 \approx 52,48$ ✓

— **Conclusion** : la croissance **s'emballe** ✓

— **Même avec un taux modeste de 2 %** ✓

— **Temps de doublement** : $\frac{70}{2} = 35$ ans ✓

— **Contrôle** : $1,02^{35} \approx 2$ ✓

— **En 200 ans** : environ 5,7 doublements ✓

— **Contrôle** : $2^{5,7} \approx 52$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Leçon** : un petit taux, longtemps, produit d'énormes effets ✓

Réponse. a) $\approx 2,6916$; $\approx 7,2446$; $\approx 52,5$ · b) chaque doublement de durée **élève au carré** le coefficient.

Correction de l'exercice 9 - Décroissance vers zéro

a) Calcul de $g(10)$: $0,8^{10}$ ✓

— Valeur :

$$\approx 0,1074$$

— Calcul de $g(20)$: $\approx 0,0115$ ✓

— Calcul de $g(30)$: $\approx 0,0012$ ✓

— Observation : elle s'écrase très vite ✓

b) Propriété : une puissance de base positive reste positive ✓

— Conclusion :

elle ne s'annule jamais

— Comportement : elle tend vers 0 ✓

— Contrôle pour $x = 50$: $\approx 0,000014$ ✓

— Toujours strictement positif ✓

— Interprétation graphique : l'axe des abscisses est une asymptote ✓

— Application, un stock qui perd 20 % par mois ✓

— Après 10 mois : il reste 10,74 % ✓

— Après 20 mois : 1,15 % ✓

— En pratique : le stock sera considéré comme épuisé ✓

— Mais le modèle ne l'annule jamais ✓

— Différence avec un modèle arithmétique : lui s'annulerait ✓

— Demi-vie : $\frac{70}{20} = 3,5$ périodes ✓

— Contrôle : $0,8^{3,5} \approx 0,4579$ ✓

— Ordre de grandeur correct ✓

Réponse. a) $\approx 0,1074$; $0,0115$; $0,0012$ · b) non, elle reste strictement positive.

Correction de l'exercice 10 - Un seuil à franchir

— Modèle : $2500 \times 1,09^x$ ✓

— Inéquation : $2500 \times 1,09^x \geq 4500$ ✓

— Division par 2500 : $1,09^x \geq 1,8$ ✓

— Test $x = 6$: $\approx 1,6771$ ✓

— Insuffisant ✓

— Capital : $\approx 4192,75$ € ✓

— Test $x = 7$: $\approx 1,8280$ ✓

— Objectif atteint ✓

— Capital : $\approx 4570,10$ € ✓

— Réponse :

7 ans

— Contrôle : $4192,75 < 4500 < 4570,10$ ✓

— Justification de l'unicité : la fonction est croissante ✓

— Capital au bout de 8 ans : $\approx 4981,41$ € ✓

— Objectif de doublement : $1,09^x \geq 2$ ✓

— Test $x = 8$: $\approx 1,9926$ ✓

- **Test** $x = 9$: $\approx 2,1719$ ✓
- **Réponse** : 9 ans ✓
- **Règle des 70** : $\frac{70}{9} \approx 7,8$ ✓
- **Écart** : la règle sous-estime, comme souvent ✓

Réponse. 7 ans, le capital atteignant $\approx 4570,10$ €.

Correction de l'exercice 11 - Affiner au dixième

- **La fonction est croissante** ✓
- **Test** $x = 3$: $\approx 1,9531$ ✓
- **Trop petit** ✓
- **Test** $x = 4$: $\approx 2,4414$ ✓
- **Trop grand** ✓
- **Encadrement** : entre 3 et 4 ✓
- **Test** $x = 3,1$: $\approx 1,9972$ ✓
- **Encore trop petit** ✓
- **Test** $x = 3,2$: $\approx 2,0423$ ✓
- **Trop grand** ✓
- **Encadrement** :

$$3,1 < x < 3,2$$

- **Solution au dixième** :

$$x \approx 3,1$$

- **Justification** : 1,9972 est plus proche de 2 que 2,0423 ✓
- **Écart pour 3,1** : 0,0028 ✓
- **Écart pour 3,2** : 0,0423 ✓
- **Interprétation** : +25 % par période double en $\approx 3,1$ périodes ✓
- **Règle des 70** : $\frac{70}{25} = 2,8$ ✓
- **Écart** : la règle est moins bonne pour les gros taux ✓
- **Raison** : elle repose sur une approximation valable pour t petit ✓

Réponse. $x \approx 3,1$ (entre 3,1 et 3,2).

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

- **Ce qui est juste** : la décroissance ✓
- **Justification** : $0,95 < 1$ ✓
- **Ce qui est faux** : la conclusion ✓
- **Propriété fondamentale** : $q^x > 0$ pour tout x ✓
- **Raison** : c'est un produit de facteurs positifs ✓
- **Conclusion** :

elle reste strictement positive

- **Comportement réel** : elle tend vers 0 ✓
- **Contrôle pour** $x = 100$: $\approx 0,0059$ ✓
- **Contrôle pour** $x = 200$: $\approx 0,000035$ ✓
- **Toujours positif** ✓
- **Vocabulaire** : l'axe des abscisses est une asymptote ✓

- **Différence avec une fonction affine décroissante** ✓
- **Exemple** : $10 - 0,5x$ ✓
- **Elle devient négative** : à partir de $x = 20$ ✓
- **Pourquoi la différence** : on **soustrait** au lieu de **multiplier** ✓
- **Une multiplication répétée par un positif reste positive** ✓
- **Interprétation concrète** : un stock qui baisse de 5 % ✓
- **Il ne peut pas devenir négatif** ✓
- **Ce que le modèle décrit bien** : un épuisement progressif ✓
- **Ce qu'il ne décrit pas** : une rupture nette ✓

Réponse. Non : une exponentielle reste strictement positive et tend vers 0.

Correction de l'exercice 13 - Deux placements à comparer

a) **Placement A** : $3000 \times 1,04^5$ ✓

— **Coefficient** : $\approx 1,2167$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 3649,96 \text{ €}$$

— **Placement B** : $2500 \times 1,07^5$ ✓

— **Coefficient** : $\approx 1,4026$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 3506,38 \text{ €}$$

— **A est encore devant** ✓

— **Écart** : $\approx 143,58 \text{ €}$ ✓

b) **Test** $x = 6$, **A** : $\approx 3795,96 \text{ €}$ ✓

— **B** : $\approx 3751,83 \text{ €}$ ✓

— **A devant** ✓

— **Test** $x = 7$, **A** : $\approx 3947,80 \text{ €}$ ✓

— **B** : $\approx 4014,45 \text{ €}$ ✓

— **B passe devant** ✓

— **Réponse** :

à partir de la 7^e année

— **Écart au rang 7** : $\approx 66,65 \text{ €}$ ✓

— **Écart au rang 10** : **A** $\approx 4440,73 \text{ €}$, **B** $\approx 4917,88 \text{ €}$ ✓

— **Différence** : $\approx 477,15 \text{ €}$ ✓

— **Explication** : le taux plus fort rattrape le capital initial ✓

— **Rapport des capitaux** : 1,2 ✓

— **Rapport des coefficients annuels** : $\approx 1,0288$ ✓

— **Il faut environ 7 ans pour rattraper 20 %** ✓

Réponse. a) A devant, $\approx 3650 \text{ €}$ contre $\approx 3506 \text{ €}$ · b) B dépasse A à partir de la 7^e année.

Correction de l'exercice 14 - Reconnaître un modèle

a) **Différences** : 225 ✓

— **Puis** : 258,75 ✓

— **Puis** : $\approx 297,56$ ✓

- Elles ne sont pas constantes ✓
- Ce n'est pas arithmétique ✓
- Quotients : $\frac{1725}{1500}$ ✓
- Valeur : 1,15 ✓
- Quotient suivant : $\frac{1983,75}{1725}$ ✓
- Valeur : 1,15 ✓
- Quotient suivant : $\approx 1,15$ ✓
- Conclusion :

exponentiel

b) **Expression :**

$$f(x) = 1500 \times 1,15^x$$

- **Taux :**
- +15 % par période
- **Contrôle pour** $x = 3$: $1500 \times 1,520875$ ✓
- **Valeur** : $\approx 2281,31$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Valeur pour** $x = 5$: $\approx 3017,04$ ✓
- **Rang du doublement** : $1,15^x = 2$ ✓
- **Test** $x = 4$: $\approx 1,7490$ ✓
- **Test** $x = 5$: $\approx 2,0114$ ✓
- **Réponse** : 5 périodes ✓

Réponse. a) exponentiel · b) $f(x) = 1500 \times 1,15^x$, soit +15 %.

Correction de l'exercice 15 - Encadrer une solution

- **Modèle** : $40\,000 \times 0,985^x$ ✓
- **Inéquation** : $0,985^x \leq 0,75$ ✓
- **Détail** : $\frac{30\,000}{40\,000} = 0,75$ ✓
- **La fonction est décroissante** ✓
- **Test** $x = 15$: $\approx 0,7972$ ✓
- **Encore au-dessus** ✓
- **Test** $x = 18$: $\approx 0,7618$ ✓
- **Toujours au-dessus** ✓
- **Test** $x = 19$: $\approx 0,7504$ ✓
- **Tout juste au-dessus** ✓
- **Test** $x = 20$: $\approx 0,7391$ ✓
- **Seuil franchi** ✓
- **Réponse :**
- 20 ans
- **Population au rang** 19 : $\approx 30\,016$ habitants ✓
- **Population au rang** 20 : $\approx 29\,565$ habitants ✓
- **Contrôle** : la seconde est bien sous 30 000 ✓
- **Perte totale** : $\approx 10\,435$ habitants ✓

- **Soit** : $\approx -26,09\%$ ✓
- **Piège** : $20 \times 1,5 = 30\%$ ✓
- **Écart** : 4 points ✓
- **Explication** : les baisses portent sur un effectif qui diminue ✓

Réponse. 20 ans, la population tombant à $\approx 29\,565$ habitants.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux régions

a) **Région A** :

$$a(x) = 120\,000 \times 1,018^x$$

— **Région B** :

$$b(x) = 180\,000 \times 0,994^x$$

b) **Coefficient de A sur 20 ans** : $1,018^{20}$ ✓

- **Valeur** : $\approx 1,4287$ ✓
- **Population** : $\approx 171\,450$ ✓
- **Coefficient de B** : $0,994^{20}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,8866$ ✓
- **Population** : $\approx 159\,588$ ✓
- **Comparaison** : A a dépassé B ✓

c) **Test** $x = 16$, **A** : $\approx 159\,641$ ✓

- **B** : $\approx 163\,476$ ✓
- **B devant** ✓
- **Test** $x = 17$, **A** : $\approx 162\,515$ ✓
- **B** : $\approx 162\,495$ ✓
- **A passe devant, de très peu** ✓
- **Écart** : ≈ 20 habitants ✓
- **Test** $x = 18$, **A** : $\approx 165\,440$ ✓
- **B** : $\approx 161\,520$ ✓
- **L'écart se creuse** : $\approx 3\,920$ ✓
- **Réponse** :

à partir de la 17^e année

- **Écart initial** : 60 000 habitants ✓
- **Écart de taux** : 2,4 points ✓
- **Conclusion** : 17 ans suffisent à combler l'écart ✓

Réponse. a) $120\,000 \times 1,018^x$ et $180\,000 \times 0,994^x$ · b) $\approx 171\,450$ contre $\approx 159\,588$ · c) à partir de la 17^e année.