

Plaquette 3 - Combinaisons avec des polynômes

Fonction inverse — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées usuelles.

fonction	k	x	x ²	x ³	$\frac{1}{x}$
dérivée	0	1	2x	3x ²	$-\frac{1}{x^2}$

Règles. $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$. Par exemple $\left(ax + b + \frac{c}{x}\right)' = a - \frac{c}{x^2}$.

Signe de la dérivée. On réduit au même dénominateur :

$$a - \frac{c}{x^2} = \frac{ax^2 - c}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, la dérivée a le **signe du numérateur**. Sur $]0; +\infty[$, $x + m > 0$ pour $m > 0$: dans un produit $(x - m)(x + m)$, seul le facteur $x - m$ décide du signe.

Plan d'étude. Dériver, réduire au même dénominateur, étudier le signe, dresser le tableau, calculer l'extremum.

Correction de l'exercice 1 - Dériver une première combinaison

On dérive terme à terme : $(3x)' = 3$ et $\left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$. Donc

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$$

En réduisant au même dénominateur, $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2}$.

Cette deuxième écriture est celle qui sert à étudier le signe : le dénominateur x^2 est toujours positif.

Réponse. $f(x) = 3 - \frac{2}{x^2} = \frac{3x^2 - 2}{x^2}$.

Correction de l'exercice 2 - Avec un terme du second degré

On dérive chaque terme :

$$g'(x) = 2x - 4 - \frac{1}{x^2}$$

En $x = 1$: $g'(1) = 2 - 4 - 1 = -3$.

La fonction g est donc décroissante au voisinage de 1, et la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3 . Attention à ne pas oublier le signe moins devant $\frac{1}{x^2}$: il vient de la dérivée de $\frac{1}{x}$, pas d'une erreur de calcul.

Réponse. $g'(x) = 2x - 4 - \frac{1}{x^2}$; $g'(1) = -3$.

Correction de l'exercice 3 - Avec un terme de degré 3

On a $(2x^3)' = 6x^2$, $(5)' = 0$ et $\left(-\frac{3}{x}\right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$. Donc

$$h'(x) = 6x^2 + \frac{3}{x^2}$$

Les deux termes sont strictement positifs pour $x > 0$: $h'(x) > 0$, et h est strictement **croissante** sur $]0; +\infty[$.

Attention au double signe moins : dériver $-\frac{3}{x}$ donne $+\frac{3}{x^2}$.

Réponse. $h'(x) = 6x^2 + \frac{3}{x^2} > 0$: h est croissante.

Correction de l'exercice 4 - La fonction $x + 9/x$

a) $f(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$, et $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

b) Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x + 3 > 0$: $f(x)$ a le signe de $x - 3$.

x	0		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	

f admet un minimum égal à

$$f(3) = 3 + \frac{9}{3} = 6$$

atteint en $x = 3$. Contrôle : $f(1) = 10$ et $f(9) = 10$, deux valeurs plus grandes que 6.

Réponse. Décroissante sur $]0; 3]$, croissante sur $[3; +\infty[$; minimum 6 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 5 - La fonction $4x + 1/x$

On dérive et on réduit au même dénominateur :

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, $2x + 1 > 0$: $f(x)$ a le signe de $2x - 1$, négatif pour $x < 0,5$ et positif pour $x > 0,5$.

f est décroissante sur $]0; 0,5]$ puis croissante sur $[0,5; +\infty[$. Son minimum vaut $f(0,5) = 2 + 2 = 4$.

Réponse. Minimum 4, atteint en $x = 0,5$.

Correction de l'exercice 6 - La fonction $x^2 + 16/x$

a) $f(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x \times x^2 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$.

b) $2x^3 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 8$. La fonction cube est croissante et $2^3 = 8$:

$$x^3 > 8 \Leftrightarrow x > 2$$

c) $f(x)$ est négative sur $]0; 2[$, nulle en 2, positive sur $]2; +\infty[$. La fonction f est décroissante puis croissante, et son minimum vaut $f(2) = 4 + 8 = 12$.

Contrôle : $f(1) = 17$ et $f(4) = 20$.

Réponse. Minimum 12, atteint en $x = 2$.

Correction de l'exercice 7 - Un maximum

a) $f(x) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{x^2}$.

b) Sur $]0; +\infty[$, $2 + x > 0$: $f(x)$ a le signe de $2 - x$, positif avant 2 et négatif après.

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f(2) = -2 + 5 - 2 = 1$ est le maximum.

c) $f(1) = -1 + 5 - 4 = 0$ et $f(4) = -4 + 5 - 1 = 0$. La fonction croît de 0 à 1 sur $[1; 2]$ puis décroît de 1 à 0 sur $[2; 4]$: $f(x) \geq 0$ sur $[1; 4]$.

Réponse. Maximum 1 en $x = 2$; $f(x) \geq 0$ sur $[1; 4]$.

Correction de l'exercice 8 - Une tangente

On calcule $f(2)$ et $f'(2)$, avec $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$:

$$f(2) = 2 + 0,5 = 2,5 \quad f'(2) = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

La tangente a pour équation $y = 0,75(x - 2) + 2,5 = 0,75x + 1$.

Vérification : pour $x = 2$, $0,75 \times 2 + 1 = 2,5$; la droite passe bien par le point de contact.

Réponse. $y = 0,75x + 1$.

Correction de l'exercice 9 - Loin de l'origine

On obtient $f(10) = 10,1$, $f(100) = 100,01$ et $f(1000) = 1000,001$.

$$f(x) - x = \frac{1}{x}$$

Quand x devient grand, l'écart $\frac{1}{x}$ entre $f(x)$ et x devient très petit : la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = x$, en restant au-dessus.

Près de 0, c'est le terme $\frac{1}{x}$ qui domine et devient très grand ($f(0,01) = 100,01$) : la courbe longe l'axe des ordonnées, qui est une asymptote verticale.

Réponse. 10,1 ; 100,01 ; 1000,001 : la courbe se rapproche de $y = x$.

Correction de l'exercice 10 - Lire puis justifier un minimum

a) Le point le plus bas semble être (2 ; 4).

b) $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2}$. Sur $]0; 6]$, $x + 2 > 0$: la dérivée a le signe de $x - 2$, négative avant 2 et positive après.

Le minimum est donc atteint en $x = 2$ et vaut

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

La lecture graphique est confirmée. Contrôle : $f(1) = 5$ et $f(4) = 5$.

Réponse. Minimum 4 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 11 - Une fonction toujours croissante

a) On dérive :

$$f(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

C'est une somme de deux nombres strictement positifs : $f(x) > 0$, et f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) $f(1) = 1 - 1 = 0$. Comme f est croissante, $f(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $f(x) > 0$ pour $x > 1$.

Autre lecture : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ a le signe de $x^2 - 1$ quand $x > 0$.

Réponse. a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ — b) $f(x) < 0$ sur $]0; 1[$, $f(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 12 - Résoudre une équation

a) Pour $x > 0$, on multiplie les deux membres par $x \neq 0$:

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

b) En développant, $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$.

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 1$ ou $x = 4$, deux solutions de $]0; +\infty[$. Vérification : $1 + 4 = 5$ et $4 + 1 = 5$. On retrouve que le minimum de cette fonction, 4, est inférieur à 5.

Réponse. $x = 1$ ou $x = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Avec un cube

$$a) f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^2 \times x^2 - 3}{x^2} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}.$$

b) Sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^4$ est croissante et vaut 1 en $x = 1$:

$$x^4 - 1 < 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \quad x^4 - 1 > 0 \text{ pour } x > 1$$

c) f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = 1 + 3 = 4$.

Contrôle : $f(0,5) = 0,125 + 6 = 6,125$ et $f(2) = 8 + 1,5 = 9,5$.

Réponse. Minimum 4, atteint en $x = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur de dérivation

L'élève a oublié que dériver $-\frac{5}{x}$ fait apparaître deux signes moins :

$$\left(-\frac{5}{x}\right)' = -5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}$$

$$\text{Donc } f(x) = 4x + \frac{5}{x^2}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $4x > 0$ et $\frac{5}{x^2} > 0$: $f(x) > 0$, et f est strictement croissante. Avec le calcul faux, on aurait pu croire à un minimum qui n'existe pas.

Réponse. $f(x) = 4x + \frac{5}{x^2} > 0$: f est croissante.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une étude sur un intervalle fermé

$$a) f(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2} = \frac{2(x^2 - 25)}{x^2} = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2}.$$

b) Sur $[1; 20]$, $x + 5 > 0$: $f(x)$ a le signe de $x - 5$. On calcule $f(1) = 52$, $f(5) = 20$ et $f(20) = 42,5$.

x	1		5		20
$f(x)$		-	0	+	
$f(x)$	52	$\searrow$	20	$\nearrow$	42,5

c) Le minimum vaut 20, atteint en $x = 5$. Le maximum se trouve à une borne :

$$\max(f(1); f(20)) = \max(52; 42,5) = 52$$

atteint en $x = 1$.

Réponse. Minimum 20 en $x = 5$; maximum 52 en $x = 1$.