

Plaquette 4 - Coût moyen et prix unitaire

Fonction inverse — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coût moyen. Si produire q unités coûte $C(q)$, le coût moyen (coût par unité) est

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Pour $C(q) = aq^2 + bq + c$, on obtient $C_M(q) = aq + b + \frac{c}{q}$: les **coûts fixes** c sont répartis sur les q unités.

Minimiser. $C'_M(q) = a - \frac{c}{q^2} = \frac{aq^2 - c}{q^2}$ a le signe de $aq^2 - c$; le minimum est atteint pour $q^2 = \frac{c}{a}$.

Comportement. Quand q devient grand, $\frac{c}{q}$ devient négligeable : le poids des coûts fixes par unité s'efface.

Prix unitaire. Un montant M réparti sur n unités donne $\frac{M}{n}$ par unité.

Correction de l'exercice 1 - Un premier coût moyen

a) On divise le coût total par la quantité :

$$C_M(q) = \frac{5q + 200}{q} = 5 + \frac{200}{q}$$

b) $C_M(10) = 25$ €, $C_M(50) = 9$ € et $C_M(100) = 7$ € par objet.

c) Quand q devient grand, $\frac{200}{q}$ se rapproche de 0 : le coût moyen se rapproche de 5 €, le coût de fabrication d'un objet, sans jamais l'atteindre.

Les coûts fixes pèsent lourd sur une petite production et deviennent négligeables sur une grande : c'est l'intérêt économique de produire en série.

Réponse. a) $C_M(q) = 5 + \frac{200}{q}$ — b) 25 € ; 9 € ; 7 € — c) de 5 €.

Correction de l'exercice 2 - Exprimer un coût moyen

On divise chaque terme par q :

$$C_M(q) = \frac{q^2 + 20q + 900}{q} = q + 20 + \frac{900}{q}$$

Les coûts fixes valent $C(0) = 900$ € : ce sont les dépenses engagées même sans rien produire (loyer, machines). Par objet, ils pèsent $\frac{900}{q}$ euros.

Par exemple, pour $q = 10$: $C_M(10) = 10 + 20 + 90 = 120$ €, dont 90 € de coûts fixes.

Réponse. $C_M(q) = q + 20 + \frac{900}{q}$; coûts fixes : $\frac{900}{q}$ par objet.

Correction de l'exercice 3 - Minimiser le coût moyen

On dérive et on réduit au même dénominateur :

$$C_M'(q) = 1 - \frac{900}{q^2} = \frac{q^2 - 900}{q^2} = \frac{(q - 30)(q + 30)}{q^2}$$

Pour $q > 0$, $q + 30 > 0$: la dérivée a le signe de $q - 30$. Le coût moyen décroît jusqu'à $q = 30$, puis croît.

Le coût moyen minimal est $C_M(30) = 30 + 20 + 30 = 80$ € par objet, pour 30 objets.

Contrôle : $C_M(10) = 120$ et $C_M(90) = 120$.

Réponse. 30 objets, pour un coût moyen minimal de 80 €.

Correction de l'exercice 4 - Un atelier de confection

a) $C_M(q) = 0,5q + 10 + \frac{288}{q}$.

b) On dérive :

$$C_M'(q) = 0,5 - \frac{288}{q^2} = \frac{0,5q^2 - 288}{q^2}$$

$0,5q^2 - 288 = 0 \Leftrightarrow q^2 = 576 \Leftrightarrow q = 24$ (car $q > 0$). Le numérateur est négatif pour $q < 24$ et positif pour $q > 24$.

Le coût moyen est minimal pour 24 vestes : $C_M(24) = 12 + 10 + 12 = 34$ € par veste.

Contrôle : $C_M(10) = 43,8$ et $C_M(60) = 44,8$.

Réponse. Minimum de 34 € par veste, pour 24 vestes.

Correction de l'exercice 5 - Un coût total de degré 3

a) $C_M(q) = q^2 - 6q + 20 + \frac{32}{q}$, donc $C_M'(q) = 2q - 6 - \frac{32}{q^2} = \frac{2q^3 - 6q^2 - 32}{q^2}$.

b) En développant, $(q - 4)(q^2 + q + 4) = q^3 + q^2 + 4q - 4q^2 - 4q - 16 = q^3 - 3q^2 - 16$.

c) Ainsi $C_M'(q) = \frac{2(q - 4)(q^2 + q + 4)}{q^2}$. Pour $q > 0$, $q^2 + q + 4 > 0$: la dérivée a le signe de $q - 4$. Le coût moyen est minimal pour $q = 4$ tonnes :

$$C_M(4) = 16 - 24 + 20 + 8 = 20$$

soit 2000 € par tonne.

Réponse. 4 tonnes, coût moyen minimal de 20 centaines d'euros par tonne.

Correction de l'exercice 6 - Un abonnement amorti

a) Le coût annuel est $300 + 2n$, réparti sur n séances :

$$c(n) = \frac{300 + 2n}{n} = 2 + \frac{300}{n}$$

b) On résout $2 + \frac{300}{n} < 5 \Leftrightarrow \frac{300}{n} < 3 \Leftrightarrow 300 < 3n \Leftrightarrow n > 100$ (on peut multiplier par $n > 0$ sans changer le sens).

Il faut au moins 101 séances. Pour 100 séances, le coût vaut exactement $c(100) = 5$ €.

Réponse. a) $c(n) = 2 + \frac{300}{n}$ — b) à partir de 101 séances.

Correction de l'exercice 7 - Des frais de port répartis

a) Les 12 € sont répartis sur les n articles : $f(n) = \frac{12}{n}$.

Par exemple $f(1) = 12$ €, $f(4) = 3$ € et $f(10) = 1,20$ €.

b) On résout, pour $n > 0$:

$$\frac{12}{n} < 0,5 \Leftrightarrow 12 < 0,5n \Leftrightarrow n > 24$$

Il faut commander au moins 25 articles. Pour 24 articles, les frais reviennent exactement à 0,50 € par article.

Réponse. a) $f(n) = \frac{12}{n}$ — b) au moins 25 articles.

Correction de l'exercice 8 - Partager une location

a) La location est partagée, le ménage ne l'est pas : $p(n) = \frac{1800}{n} + 25$.

$$p(6) = 325 \quad p(9) = 225 \quad p(12) = 175$$

b) $\frac{1800}{n} + 25 \leq 200 \Leftrightarrow \frac{1800}{n} \leq 175 \Leftrightarrow n \geq \frac{1800}{175} \approx 10,29$.

Il faut être au moins 11. Vérification : $p(10) = 205$ € et $p(11) \approx 188,64$ €.

Réponse. a) 325 € ; 225 € ; 175 € — b) au moins 11 personnes.

Correction de l'exercice 9 - Un seuil de coût moyen

On résout l'inéquation pour $q > 0$:

$$8 + \frac{400}{q} \leq 10 \Leftrightarrow \frac{400}{q} \leq 2 \Leftrightarrow 400 \leq 2q \Leftrightarrow q \geq 200$$

On a multiplié par $q > 0$, ce qui conserve le sens.

Le coût moyen descend à 10 € ou moins à partir de 200 unités. Contrôle :

$$C_M(200) = 8 + 2 = 10 \text{ et } C_M(400) = 9.$$

Réponse. Pour $q \geq 200$.

Correction de l'exercice 10 - Coût moyen et coût marginal

a) $C_M(q) = q + \frac{100}{q}$, et

$$C_M'(q) = 1 - \frac{100}{q^2} = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$$

qui a le signe de $q - 10$ pour $q > 0$. Le minimum est $C_M(10) = 10 + 10 = 20$.

b) $C'(q) = 2q$, donc $C'(10) = 20$.

Au minimum du coût moyen, le coût marginal **égale** le coût moyen. C'est un résultat général en économie : tant que produire une unité de plus coûte moins cher que la moyenne, la moyenne baisse.

Réponse. a) $q = 10$, minimum 20 — b) $C'(10) = 20$: coût marginal = coût moyen.

Correction de l'exercice 11 - Lire un coût moyen

a) Le point le plus bas de la courbe semble être (10 ; 18).

b) On dérive :

$$C_M'(q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{q^2} = \frac{q^2 - 100}{2q^2}$$

qui a le signe de $q - 10$ sur $[2 ; 30]$. Le minimum vaut $C_M(10) = 5 + 8 + 5 = 18$ €.

Contrôle aux bornes : $C_M(2) = 34$ € et $C_M(30) \approx 24,67$ €.

Réponse. Minimum de 18 € pour 10 unités.

Correction de l'exercice 12 - Produire avec profit

Le bénéfice par objet est la différence entre le prix de vente et le coût moyen ; le bénéfice total est

$$B(q) = q \times (100 - C_M(q))$$

a) Pour $q = 30$: $B(30) = 30 \times (100 - 80) = 600$ €. L'entreprise gagne 600 €.

b) Pour $q = 10$: $C_M(10) = 10 + 20 + 90 = 120$ €, plus que le prix de vente ;
 $B(10) = 10 \times (100 - 120) = -200$ €, une perte.

Avec une petite production, les coûts fixes par objet sont trop lourds pour être couverts par le prix de vente.

Réponse. a) Oui, 600 € — b) non, perte de 200 €.

Correction de l'exercice 13 - Une imprimerie

Le coût moyen est $C_M(q) = 0,002q + 3 + \frac{2000}{q}$, de dérivée

$$C_M'(q) = 0,002 - \frac{2000}{q^2} = \frac{0,002q^2 - 2000}{q^2}$$

Elle s'annule pour $q^2 = \frac{2000}{0,002} = 1\,000\,000$, soit $q = 1000$. Elle est négative avant et positive après.

Le tirage optimal est de 1000 brochures, pour un coût de $C_M(1000) = 2 + 3 + 2 = 7$ € par brochure. Contrôle : $C_M(100) = 23,20$ € et $C_M(5000) = 13,40$ €.

Réponse. 1000 brochures, à 7 € l'unité.

Correction de l'exercice 14 - La consommation d'une voiture

a) On multiplie par 100 pour avoir des litres aux 100 km :

$$100\,c(10) = 11 \quad 100\,c(100) = 5,6 \quad 100\,c(300) = 5,2$$

b) Quand d devient grand, $\frac{0,6}{d}$ se rapproche de 0 : la consommation se rapproche de 0,05 L/km, soit 5 L aux 100 km.

Les petits trajets sont donc très gourmands : sur 10 km, la voiture consomme plus du double de sa consommation sur route.

Réponse. a) 11 L ; 5,6 L ; 5,2 L aux 100 km — b) de 5 L aux 100 km.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : coût moyen et bénéfice

a) $C_M(q) = 2q + 10 + \frac{800}{q}$ et

$$C_M'(q) = 2 - \frac{800}{q^2} = \frac{2(q - 20)(q + 20)}{q^2}$$

qui a le signe de $q - 20$. On calcule $C_M(5) = 180$, $C_M(20) = 90$ et $C_M(50) = 126$.

q	5		20		50
$C_M'(q)$		–	0	+	
$C_M(q)$	180	↘	90	↗	126

b) Le coût moyen minimal est de 90 € par objet, pour 20 objets.

c) Bénéfice : $B(20) = 20 \times (120 - 90) = 600$ €.

Réponse. b) 90 € pour 20 objets — c) 600 €.