

Plaquette 2 - Dérivée et sens de variation

Fonction inverse — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux de variation de $f(x) = \frac{1}{x}$ entre a et $a + h$ (a et $a + h$ non nuls, de même signe) :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Quand h se rapproche de 0, ce taux se rapproche de $-\frac{1}{a^2}$.

Dérivée. Pour tout $x \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$$

Sens de variation. $-\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction inverse est strictement **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et strictement **décroissante** sur $]0; +\infty[$. Elle n'est pas décroissante sur la réunion des deux : $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

Tangente au point d'abscisse a : $y = f(a)(x - a) + f(a)$.

Correction de l'exercice 1 - Un taux de variation

Le taux de variation entre 1 et 3 est :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

Il est négatif : quand x passe de 1 à 3, $f(x)$ diminue, de 1 à $\frac{1}{3}$.

Graphiquement, la sécante qui relie les points d'abscisses 1 et 3 de la courbe « descend » : son coefficient directeur vaut $-\frac{1}{3}$.

Réponse. $-\frac{1}{3}$: la fonction diminue entre 1 et 3.

Correction de l'exercice 2 - Le nombre dérivé en 2

a) On réduit au même dénominateur :

$$f(2+h) - f(2) = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} = \frac{-h}{2(2+h)}$$

En divisant par $h \neq 0$, on obtient $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-1}{2(2+h)}$.

b) Quand h se rapproche de 0, $2(2+h)$ se rapproche de 4 ; le taux se rapproche de $-\frac{1}{4}$.
Donc $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$.

Contrôle numérique : pour $h = 0,001$, le taux vaut environ $-0,24988$.

Réponse. b) $f'(2) = -0,25$.

Correction de l'exercice 3 - La formule de la dérivée

Pour $h \neq 0$ tel que $a + h \neq 0$, on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$$

Le taux de variation vaut donc $\frac{-1}{a(a+h)}$.

Quand h se rapproche de 0, le dénominateur $a(a+h)$ se rapproche de $a \times a = a^2$, et le taux se rapproche de $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ pour tout $a \neq 0$: la dérivée de la fonction inverse est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Réponse. $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Correction de l'exercice 4 - Calculer des nombres dérivés

On applique $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$:

$$f'(-1) = -1 \quad f'(-2) = -\frac{1}{4} \quad f'(0,5) = -\frac{1}{0,25} = -4 \quad f'(10) = -0,01$$

Tous ces nombres sont **négatifs** : un carré est positif, donc $-\frac{1}{x^2}$ est toujours négatif.

On remarque aussi que la pente est très forte près de 0 (-4 en $0,5$) et presque nulle loin de 0 ($-0,01$ en 10) : la courbe est raide près de l'axe des ordonnées et presque horizontale ensuite.

Réponse. -1 ; $-0,25$; -4 ; $-0,01$: tous négatifs.

Correction de l'exercice 5 - La tangente en 1

On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$. La tangente a pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 1 = -x + 2$$

Vérification : la droite passe bien par le point $(1 ; 1)$ de la courbe, puisque $-1 + 2 = 1$.

Cette tangente coupe les axes en $(2 ; 0)$ et $(0 ; 2)$: le point de contact $(1 ; 1)$ est le milieu de ces deux points.

Réponse. $y = -x + 2$.

Correction de l'exercice 6 - La tangente en 2

On a $f(2) = 0,5$ et $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$:

$$y = -0,25(x - 2) + 0,5 = -0,25x + 1$$

— Avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $y = 1$, point $(0 ; 1)$.

— Avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : $-0,25x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, point $(4 ; 0)$.

Le point de contact $(2 ; 0,5)$ est encore le milieu de ces deux points : c'est une propriété de toutes les tangentes à l'hyperbole.

Réponse. $y = -0,25x + 1$; elle coupe les axes en $(0 ; 1)$ et $(4 ; 0)$.

Correction de l'exercice 7 - Le sens de variation

Pour tout $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

La fonction inverse est strictement **décroissante sur** $] -\infty ; 0[$ et strictement **décroissante sur** $] 0 ; +\infty[$.

Sur $] 0 ; +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f(x)$		-	
$f(x)$		$\searrow$	

Les deux bornes ne sont pas atteintes : près de 0, $f(x)$ est très grand ; pour x très grand, $f(x)$ est proche de 0 mais reste positif.

Réponse. Strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Repérer une erreur

Il suffit d'un contre-exemple. On prend -1 et 1 :

$$-1 < 1 \quad \text{et} \quad f(-1) = -1 < f(1) = 1$$

Si la fonction était décroissante sur toute la réunion, on aurait $f(-1) \geq f(1)$: c'est faux.

La dérivée négative donne la décroissance **sur chaque intervalle** séparément, pas d'un intervalle à l'autre. Sur la courbe, on « remonte » de la branche du bas (valeurs négatives) à la branche du haut (valeurs positives) en passant par-dessus l'axe des ordonnées.

Réponse. Contre-exemple : $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer avec le sens de variation

La fonction inverse est décroissante sur $] 0 ; +\infty[$: elle **inverse l'ordre**. Comme $2,7 < 2,71$:

$$\frac{1}{2,7} > \frac{1}{2,71}$$

Elle est aussi décroissante sur $] -\infty ; 0[$. Comme $-3,2 < -3,1$, on a $\frac{1}{-3,2} > \frac{1}{-3,1}$.

Vérification : $\frac{1}{2,7} \approx 0,3704 > 0,3690 \approx \frac{1}{2,71}$, et $\frac{1}{-3,2} = -0,3125 > -0,3226 \approx \frac{1}{-3,1}$.

Réponse. $\frac{1}{2,7} > \frac{1}{2,71}$ et $\frac{1}{-3,2} > \frac{1}{-3,1}$.

Correction de l'exercice 10 - Dériver k/x

On applique $\left(\frac{k}{x}\right)' = k \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{k}{x^2}$:

$$g'(x) = -\frac{5}{x^2} \quad h'(x) = -\frac{-2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

— $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty[$.

— $h'(x) > 0$: h est strictement **croissante** sur $] 0 ; +\infty[$.

Un coefficient k négatif inverse le sens de variation, comme pour une fonction

exponentielle $k \times a^x$.

Réponse. $g'(x) = -\frac{5}{x^2}$ (décroissante) ; $h'(x) = \frac{2}{x^2}$ (croissante).

Correction de l'exercice 11 - Encadrer un inverse

Sur $]0; +\infty[$, la fonction inverse est décroissante : elle **inverse l'ordre**. De $2 \leq x \leq 5$, on déduit :

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad 0,2 \leq \frac{1}{x} \leq 0,5$$

En multipliant par $10 > 0$ (l'ordre est conservé) : $2 \leq \frac{10}{x} \leq 5$.

Exemple concret : 10 € partagés entre 2 à 5 personnes donnent une part comprise entre 2 € et 5 €.

Réponse. $0,2 \leq \frac{1}{x} \leq 0,5$ et $2 \leq \frac{10}{x} \leq 5$.

Correction de l'exercice 12 - Une pente donnée

On résout $f(a) = -\frac{1}{4}$:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2$$

— En $a = 2$: $f(2) = 0,5$, tangente $y = -0,25(x - 2) + 0,5 = -0,25x + 1$.

— En $a = -2$: $f(-2) = -0,5$, tangente $y = -0,25(x + 2) - 0,5 = -0,25x - 1$.

Les deux tangentes sont parallèles, et les points de contact $(2; 0,5)$ et $(-2; -0,5)$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Réponse. Aux points d'abscisses 2 et -2 : $y = -0,25x + 1$ et $y = -0,25x - 1$.

Correction de l'exercice 13 - Lire une tangente

a) La droite T passe par $(0; 2)$ et $(2; 0)$. Son coefficient directeur est :

$$\frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1) = -1$: c'est bien le coefficient directeur de la tangente en A.

Le nombre dérivé en a est la pente de la tangente au point d'abscisse a ; ici, la tangente descend d'une unité quand on avance d'une unité.

Réponse. -1, et $f'(1) = -1$.

Correction de l'exercice 14 - Prix unitaire : taux moyen et nombre dérivé

a) $p(20) = 30$ et $p(30) = 20$, donc

$$\frac{p(30) - p(20)}{30 - 20} = \frac{20 - 30}{10} = -1$$

Entre 20 et 30 articles, le prix unitaire baisse en moyenne de 1 € par article supplémentaire.

b) $p'(x) = -\frac{600}{x^2}$, donc $p'(20) = -\frac{600}{400} = -1,5$. Autour de 20 articles, le prix unitaire baisse d'environ 1,50 € pour un article de plus : la baisse est plus rapide au début, et ralentit ensuite.

Réponse. a) -1 € par article — b) $p'(20) = -1,5$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction $4/x$

a) $k'(x) = -\frac{4}{x^2} < 0$: k est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) $k(2) = 2$ et $k'(2) = -\frac{4}{4} = -1$, donc

$$T: y = -1 \times (x - 2) + 2 = -x + 4$$

c) Pour $x = 0$, $y = 4$: point $(0; 4)$. Pour $y = 0$, $x = 4$: point $(4; 0)$.

Le milieu de ces deux points a pour coordonnées $\left(\frac{0+4}{2}; \frac{4+0}{2}\right) = (2; 2)$: c'est bien le point de contact $(2; k(2))$.

Réponse. a) décroissante — b) $y = -x + 4$ — c) $(0; 4)$ et $(4; 0)$, milieu $(2; 2)$.