

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse

Fonction inverse — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Étude d'une fonction $f(x) = P(x) + \frac{k}{x}$ sur un intervalle I inclus dans $]0; +\infty[$:

1. dériver : $f'(x) = P'(x) - \frac{k}{x^2}$; 2. réduire au même dénominateur $x^2 > 0$; 3. étudier le signe du numérateur (factorisation fournie ou facteur $x + m > 0$) ; 4. dresser le tableau de variations, avec les valeurs aux bornes de I ; 5. conclure dans le contexte.

Tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Bénéfice. $B(q) = R(q) - C(q)$, avec $R(q) = p \times q$ pour un prix de vente unitaire p .

Optimum entier. Si l'optimum théorique n'est pas entier, on compare les valeurs aux deux entiers qui l'encadrent.

Correction de l'exercice 1 - Un nombre et son inverse

a) On dérive :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, la dérivée a le signe de $x - 1$: f décroît sur $]0; 1]$, puis croît sur $[1; +\infty[$. Son minimum est $f(1) = 2$.

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

c) $f(0,5) = 2,5$ et $f'(0,5) = 1 - 4 = -3$: la tangente a pour équation $y = -3(x - 0,5) + 2,5 = -3x + 4$.

Réponse. a) minimum 2 en $x = 1$ — b) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ — c) $y = -3x + 4$.

Correction de l'exercice 2 - Une fonction croissante bornée

a) $g'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} > 0$: g est strictement croissante.

b) On résout :

$$3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Comme g est croissante : $g(x) < 0$ sur $]0; \frac{2}{3}[$ et $g(x) > 0$ sur $]\frac{2}{3}; +\infty[$.

c) Quand x devient très grand, $\frac{2}{x}$ se rapproche de 0 et $g(x)$ se rapproche de 3. Comme $\frac{2}{x} > 0$, $g(x) < 3$: la courbe reste sous la droite d'équation $y = 3$, asymptote horizontale.

Réponse. a) $g'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$ — b) $x = \frac{2}{3}$ — c) de 3, sans jamais l'atteindre.

Correction de l'exercice 3 - Le rectangle de périmètre minimal

a) La longueur L vérifie $xL = 36$, donc $L = \frac{36}{x}$, et le périmètre vaut $2x + 2L = 2x + \frac{72}{x}$.

b) On dérive :

$$P'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2} = \frac{2(x - 6)(x + 6)}{x^2}$$

qui a le signe de $x - 6$ pour $x > 0$. Le périmètre est minimal pour $x = 6$ m ; la longueur vaut alors $\frac{36}{6} = 6$ m.

L'enclos optimal est un **carré** de 6 m de côté, de périmètre $P(6) = 24$ m. Contrôle : $P(2) = 40$ et $P(12) = 30$.

Réponse. Un carré de 6 m de côté, périmètre 24 m.

Correction de l'exercice 4 - Une boîte économe

a) Le fond mesure x^2 . Chacune des 4 faces latérales mesure $x \times \frac{32}{x^2} = \frac{32}{x}$. Donc

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x}.$$

b) On dérive :

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$$

$2x^3 - 128 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 64 \Leftrightarrow x > 4$, car la fonction cube est croissante et $4^3 = 64$.

S décroît sur $]0; 4]$ et croît ensuite : la surface est minimale pour $x = 4$ cm (hauteur 2 cm), avec $S(4) = 16 + 32 = 48$ cm².

Réponse. Côté 4 cm, hauteur 2 cm ; surface minimale 48 cm².

Correction de l'exercice 5 - Le bus du voyage scolaire

a) Le bus est partagé, l'entrée ne l'est pas :

$$c(n) = 3 + \frac{600}{n}$$

On obtient $c(20) = 33$ €, $c(40) = 18$ € et $c(50) = 15$ €.

b) $3 + \frac{600}{n} \leq 20 \Leftrightarrow \frac{600}{n} \leq 17 \Leftrightarrow n \geq \frac{600}{17} \approx 35,3$.

Il faut au moins 36 élèves (et au plus 50, la capacité du bus). Remplir le bus fait baisser le prix jusqu'à 15 €, sans pouvoir descendre plus bas.

Réponse. a) 33 € ; 18 € ; 15 € — b) au moins 36 élèves.

Correction de l'exercice 6 - La vitesse la plus économique

a) Le trajet dure $\frac{400}{v}$ heures ; le salaire coûte $32 \times \frac{400}{v} = \frac{12\,800}{v}$. Le carburant coûte $400 \times 0,005v = 2v$.

b) On dérive :

$$C'(v) = 2 - \frac{12\,800}{v^2} = \frac{2(v^2 - 6400)}{v^2} = \frac{2(v - 80)(v + 80)}{v^2}$$

qui a le signe de $v - 80$. Le coût est minimal à 80 km/h : $C(80) = 160 + 160 = 320$ €.

Rouler lentement fait payer des heures de salaire, rouler vite du carburant : $C(40) = 400$

€ et $C(110) \approx 336,36$ €.

Réponse. 80 km/h, pour un coût de 320 €.

Correction de l'exercice 7 - Retrouver une fonction

Les deux points donnent un système :

$$f(1) = a + b = 5 \quad f(2) = 2a + \frac{b}{2} = 4$$

De la première équation, $b = 5 - a$. Dans la seconde :

$$2a + \frac{5-a}{2} = 4 \Leftrightarrow 4a + 5 - a = 8 \Leftrightarrow a = 1, \text{ puis } b = 4.$$

Donc $f(x) = x + \frac{4}{x}$, et $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$ a le signe de $x-2$. Le minimum vaut $f(2) = 4$.

Réponse. $a = 1$, $b = 4$; minimum 4 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 8 - Une tangente qui passe par un point

a) $f(a) = \frac{1}{a}$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$:

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

b) La tangente passe par $(0; 1)$ si son ordonnée à l'origine vaut $1 : \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2$. C'est la tangente au point $(2; 0,5)$, d'équation $y = -0,25x + 1$.

Pour l'origine, il faudrait $\frac{2}{a} = 0$, ce qui est impossible : aucune tangente à l'hyperbole ne passe par l'origine.

Réponse. b) Oui pour $(0; 1)$: en $a = 2$; aucune ne passe par l'origine.

Correction de l'exercice 9 - Comparer x et son inverse

On étudie le signe de la différence, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{x}$$

Pour $x > 0$, $x > 0$ et $1 + x > 0$: la différence a le signe de $1 - x$.

Donc $\frac{1}{x} > x$ pour $0 < x < 1$, $\frac{1}{x} = x$ pour $x = 1$, et $\frac{1}{x} < x$ pour $x > 1$.

Graphiquement, l'hyperbole est au-dessus de la droite $y = x$ sur $]0; 1[$ et en dessous ensuite ; elles se coupent au point $(1; 1)$. Par exemple, 0,5 a pour inverse 2, plus grand que lui.

Réponse. Pour $0 < x < 1$.

Correction de l'exercice 10 - Une hyperbole et une droite

a) Pour $x \neq 0$, on multiplie par x :

$$\frac{1}{x} = -x + 2,5 \Leftrightarrow 1 = -x^2 + 2,5x \Leftrightarrow x^2 - 2,5x + 1 = 0$$

b) En développant : $(x - 2)(x - 0,5) = x^2 - 0,5x - 2x + 1 = x^2 - 2,5x + 1$.

Les solutions sont $x = 2$ et $x = 0,5$. Les points d'intersection sont $(2; 0,5)$ et $(0,5; 2)$: ils sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Réponse. Les points $(2; 0,5)$ et $(0,5; 2)$.

Correction de l'exercice 11 - Remplir une cuve

a) $t(d) = \frac{6000}{d}$.

b) Le nouveau débit est $1,2d$, et

$$t(1,2d) = \frac{6000}{1,2d} = \frac{1}{1,2} \times t(d) \approx 0,8333 \times t(d)$$

La durée diminue d'environ 16,7 %, et non de 20 %.

c) La fonction t est décroissante : $\frac{6000}{d} \leq 40 \Leftrightarrow d \geq \frac{6000}{40} = 150$. Il faut un débit d'au moins 150 L/min.

Réponse. a) $t(d) = \frac{6000}{d}$ — b) environ 16,7 % — c) au moins 150 L/min.

Correction de l'exercice 12 - Combien d'ouvriers ?

a) On dérive :

$$T'(x) = 2 - \frac{120}{x^2} = \frac{2(x^2 - 60)}{x^2}$$

qui s'annule pour $x = \sqrt{60} \approx 7,75$, est négative avant et positive après. La fonction décroît puis croît.

b) Le nombre d'ouvriers est entier : on compare les deux entiers qui encadrent 7,75.

$$T(7) = 14 + \frac{120}{7} \approx 31,14 \text{ h et } T(8) = 16 + 15 = 31 \text{ h.}$$

Il faut engager 8 ouvriers, pour une durée de 31 heures. L'optimum entier n'est pas forcément l'arrondi : on vérifie toujours les deux voisins.

Réponse. 8 ouvriers, pour 31 heures.

Correction de l'exercice 13 - Lire une asymptote

a) Les deux points donnent :

$$a + b = 5 \quad a + \frac{b}{3} = 3$$

En soustrayant, $\frac{2b}{3} = 2$, donc $b = 3$ et $a = 2$: $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$.

b) Quand x devient grand, $\frac{3}{x}$ se rapproche de 0, donc $f(x)$ se rapproche de 2. La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale ; la courbe reste au-dessus, car $\frac{3}{x} > 0$.

Réponse. a) $a = 2$, $b = 3$ — b) $f(x)$ se rapproche de 2 : asymptote $y = 2$.

Correction de l'exercice 14 - Une fonction avec $x^2/2$

a) $f(x) = \frac{2x}{2} - \frac{8}{x^2} = x - \frac{8}{x^2} = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.

b) Le dénominateur est positif ; la fonction cube est croissante et $2^3 = 8$, donc

$$x^3 - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \quad x^3 - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

f est décroissante sur $]0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$. Son minimum vaut $f(2) = 2 + 4 = 6$.

Contrôle : $f(1) = 8,5$ et $f(4) = 10$.

Réponse. Minimum 6, atteint en $x = 2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : produire des vélos

a) $C_M(q) = q + 50 + \frac{2500}{q}$ et $C_M'(q) = \frac{(q-50)(q+50)}{q^2}$, du signe de $q - 50$. Le coût moyen est minimal pour 50 vélos : $C_M(50) = 50 + 50 + 50 = 150$ €.

b) $B(q) = 180q - q^2 - 50q - 2500 = -q^2 + 130q - 2500$, donc

$$B'(q) = -2q + 130$$

positive pour $q < 65$, négative ensuite. Le bénéfice est maximal pour 65 vélos : $B(65) = 1725$ €.

c) Pour 50 vélos, le bénéfice n'est que $B(50) = 1500$ €. Minimiser le coût par vélo n'est pas maximiser le bénéfice : au-delà de 50 vélos, chaque vélo coûte un peu plus cher en moyenne, mais se vend encore avec profit. L'entreprise doit viser 65 vélos.

Réponse. a) 50 vélos, 150 € — b) 65 vélos, 1725 € — c) 65 vélos.