

Plaquette 1 - Valeurs, courbe et comportement aux bornes

Fonction inverse — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La fonction inverse est définie pour tout réel $x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Elle est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$: on ne divise jamais par 0. Pour tout $x \neq 0$, $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Valeurs.

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4
$\frac{1}{x}$	-0,5	-1	-2	2	1	0,5	0,25

Signe. $\frac{1}{x}$ a le signe de x : négatif sur $] -\infty ; 0[$, positif sur $] 0 ; +\infty [$.

Courbe. C'est une **hyperbole**, formée de deux branches, symétrique par rapport à l'origine : $f(-x) = -f(x)$.

Comportement aux bornes (approche intuitive).

- Quand x devient très grand, $\frac{1}{x}$ devient très proche de 0 : la courbe se rapproche de l'axe des abscisses, **asymptote horizontale**.
- Quand x se rapproche de 0 en restant positif, $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut : la courbe longe l'axe des ordonnées, **asymptote verticale**.

Ordres de grandeur : $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ et $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des images

On divise 1 par chaque nombre :

$$f(4) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad f(0,5) = \frac{1}{0,5} = 2 \quad f(-5) = -\frac{1}{5} = -0,2$$

- $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \div \frac{1}{3} = 1 \times 3 = 3$: l'inverse d'une fraction s'obtient en la retournant.
- $f(0,01) = \frac{1}{0,01} = 100$.

On remarque que plus le nombre positif est petit, plus son inverse est grand, et qu'un nombre négatif a un inverse négatif.

Réponse. 0,25 ; 2 ; -0,2 ; 3 ; 100.

Correction de l'exercice 2 - Pourquoi 0 n'a pas d'image

Calculer $\frac{1}{0}$ reviendrait à chercher un nombre y tel que $0 \times y = 1$. Or $0 \times y = 0$ pour tout y : un tel nombre n'existe pas. On ne divise jamais par 0.

La fonction inverse est donc définie sur

$$]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$$

c'est-à-dire pour tout réel non nul.

Le nombre 0 n'est pas non plus une image : $\frac{1}{x} = 0$ est impossible, puisqu'un quotient de numérateur 1 n'est jamais nul. La courbe ne coupe donc aucun des deux axes.

Réponse. Définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$; 0 n'est jamais une image.

Correction de l'exercice 3 - Tracer l'hyperbole

On calcule chaque inverse :

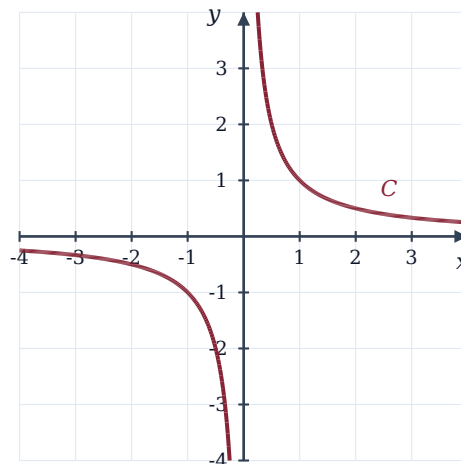
x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	4
f(x)	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	0,25

La courbe est une **hyperbole** formée de deux branches, que l'on ne relie pas : la fonction n'est pas définie en 0.

$$f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

Deux abscisses opposées ont des images opposées : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Réponse. -0,25 ; -0,5 ; -1 ; -2 ; -4 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25.



L'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 4 - Inverses de grands nombres

L'inverse d'une puissance de 10 change le signe de l'exposant :

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \quad \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

Pour le dernier nombre, on sépare les deux facteurs :

$$\frac{1}{2 \times 10^9} = \frac{1}{2} \times 10^{-9} = 0,5 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-10}$$

Plus un nombre positif est grand, plus son inverse est proche de 0 : c'est ce qui fait que la courbe se rapproche de l'axe des abscisses quand x devient grand.

Réponse. 10^{-3} ; 10^{-6} ; 5×10^{-10} : l'inverse se rapproche de 0.

Correction de l'exercice 5 - Inverses de petits nombres

On utilise $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$:

$$\frac{1}{0,001} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000 \quad \frac{1}{10^{-6}} = 10^6$$

Pour le dernier nombre :

$$\frac{1}{4 \times 10^{-5}} = \frac{1}{4} \times 10^5 = 0,25 \times 10^5 = 25\,000$$

L'inverse d'un nombre positif très proche de 0 est très grand : il dépasse n'importe quelle valeur fixée à l'avance si le nombre est assez petit. La courbe « monte » le long de l'axe des ordonnées.

Réponse. 1000 ; 10^6 ; 25 000 : l'inverse devient très grand.

Correction de l'exercice 6 - Résoudre des équations

Pour $k \neq 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$ a une unique solution, l'inverse de k :

$$\frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$$

- $\frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} = 0,2$;
- $\frac{1}{x} = -0,4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-0,4} = -2,5$;
- $\frac{1}{x} = 0$ n'a **aucune solution** : un quotient de numérateur 1 n'est jamais nul.

Graphiquement, la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) ne coupe jamais l'hyperbole.

Réponse. $x = 0,2$; $x = -2,5$; aucune solution.

Correction de l'exercice 7 - Des points sur la courbe

Un point $(x; y)$ est sur la courbe si et seulement si $y = \frac{1}{x}$. On compare l'ordonnée à l'inverse de l'abscisse.

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{1}{0,2} = 5 \neq 4 \quad \frac{1}{-0,5} = -2$$

- A est sur la courbe ;
- B n'y est pas : le point de la courbe d'abscisse 0,2 a pour ordonnée 5 ;
- C est sur la courbe.

Autre méthode : un point $(x; y)$ est sur l'hyperbole si $x \times y = 1$; ici $4 \times 0,25 = 1$, $0,2 \times 4 = 0,8$ et $-0,5 \times (-2) = 1$.

Réponse. A et C oui ; B non.

Correction de l'exercice 8 - La symétrie de la courbe

a) $\frac{1}{-2} = -0,5$: le point $M'(-2; -0,5)$ est bien sur la courbe.

b) Pour tout $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

Deux abscisses opposées ont des images opposées. Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; -f(x))$

sont symétriques par rapport à l'origine O , qui est le milieu de $[MM']$.

La courbe est donc **symétrique par rapport à l'origine** : il suffit de tracer la branche positive, puis de la reproduire par cette symétrie.

Réponse. a) oui — b) $f(-x) = -f(x)$: courbe symétrique par rapport à l'origine.

Correction de l'exercice 9 - Une somme à partager

a) Chacun reçoit $p(x) = \frac{1200}{x} = 1200 \times \frac{1}{x}$ euros.

$$p(10) = 120 \quad p(20) = 60 \quad p(40) = 30$$

b) $p(2x) = \frac{1200}{2x} = \frac{1}{2} \times p(x)$: quand le nombre de gagnants double, la part de chacun est divisée par 2. La part et le nombre de gagnants sont **inversement proportionnels**.

c) Quand x devient très grand, $\frac{1200}{x}$ se rapproche de 0 : avec 10 000 gagnants, chacun ne recevrait plus que 0,12 €. La part n'est pourtant jamais nulle.

Réponse. a) 120 € ; 60 € ; 30 € — b) divisée par 2 — c) elle se rapproche de 0.

Correction de l'exercice 10 - Près de zéro

On obtient :

$$\frac{1}{0,1} = 10 \quad \frac{1}{0,01} = 100 \quad \frac{1}{0,001} = 1000 \quad \frac{1}{-0,001} = -1000$$

Quand x se rapproche de 0 en restant **positif**, $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut : la branche de droite monte en longeant l'axe des ordonnées.

Quand x se rapproche de 0 en restant **négatif**, $\frac{1}{x}$ devient négatif et très grand en valeur absolue : la branche de gauche descend le long de l'axe.

L'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** de la courbe : elle s'en approche sans jamais le toucher.

Réponse. 10 ; 100 ; 1000 ; -1000 : asymptote verticale, l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 11 - Très loin de zéro

On obtient :

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{100} = 0,01 \quad \frac{1}{10^6} = 10^{-6} \quad \frac{1}{-10^6} = -10^{-6}$$

Quand x devient très grand, $\frac{1}{x}$ est positif et devient aussi proche de 0 que l'on veut ; quand x est négatif et très grand en valeur absolue, $\frac{1}{x}$ est négatif et lui aussi très proche de 0.

Les deux branches se rapprochent donc de l'axe des abscisses, l'une par-dessus, l'autre par-dessous, sans jamais l'atteindre : l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale**.

Réponse. 0,1 ; 0,01 ; 10^{-6} ; -10^{-6} : asymptote horizontale, l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 12 - Lire une courbe

a) A est sur la courbe, donc $g(2) = 3$:

$$\frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 6$$

et $g(x) = \frac{6}{x}$.

b) $g(1) = 6$, $g(4) = 1,5$ et $g(6) = 1$: on lit bien ces ordonnées sur la courbe.

c) $\frac{6}{x} = 1,5 \Leftrightarrow x = \frac{6}{1,5} = 4$. On retrouve le point (4 ; 1,5) de la question b.

Pour tout point de cette courbe, le produit $x \times g(x)$ vaut 6 : c'est la signature d'une situation de proportionnalité inverse.

Réponse. a) $k = 6$ — b) 6 ; 1,5 ; 1 — c) $x = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Vitesse et durée

a) Durée = distance $\div$ vitesse, donc $t(v) = \frac{120}{v}$:

$$t(60) = 2 \text{ h} \quad t(80) = 1,5 \text{ h} \quad t(100) = 1,2 \text{ h}$$

b) Rouler 20 % plus vite multiplie la vitesse par 1,2 ; la durée est alors divisée par 1,2 :

$$t(1,2v) = \frac{120}{1,2v} = \frac{1}{1,2} \times t(v) \approx 0,833 \times t(v)$$

La durée baisse d'environ 16,7 %, et non de 20 % : une grandeur inversement proportionnelle ne varie pas du même pourcentage que l'autre.

Réponse. a) 2 h ; 1,5 h ; 1,2 h — b) non, une baisse d'environ 16,7 %.

Correction de l'exercice 14 - Comparer des inverses

Pour des nombres **positifs**, plus le nombre est grand, plus son inverse est petit. Comme $0,5 < 3 < 7$:

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{3} < \frac{1}{0,5}$$

c'est-à-dire environ $0,143 < 0,333 < 2$.

Pour les nombres **négatifs**, on calcule : $\frac{1}{-2} = -0,5$ et $\frac{1}{-5} = -0,2$, donc $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-5}$, alors que $-2 > -5$.

Dans les deux cas, prendre l'inverse de deux nombres de même signe **inverse l'ordre** : la fonction inverse est décroissante sur chacun des deux intervalles, ce que la dérivée confirmera.

Réponse. $\frac{1}{7} < \frac{1}{3} < \frac{1}{0,5}$; $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-5}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la fonction $3/x$

a) $g(-3) = -1$, $g(0,5) = 6$, $g(6) = 0,5$ et $g(300) = 0,01$.

b) $\frac{3}{x} = k \Leftrightarrow x = \frac{3}{k}$ pour $k \neq 0$:

$$\frac{3}{x} = 0,6 \Leftrightarrow x = 5 \quad \frac{3}{x} = -12 \Leftrightarrow x = -0,25$$

c) Quand x devient très grand, $\frac{3}{x}$ se rapproche de 0 (par exemple $g(3000) = 0,001$) : l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Quand x se rapproche de 0 en restant positif, $\frac{3}{x}$ devient très grand ($g(0,001) = 3000$) : l'axe des ordonnées est asymptote verticale.

La courbe de g a la même allure que celle de $\frac{1}{x}$: chaque ordonnée est simplement multipliée par 3.

Réponse. a) -1 ; 6 ; 0,5 ; 0,01 — b) $x = 5$; $x = -0,25$ — c) asymptotes : les deux axes.