

Plaquette 3 - Combinaisons avec des polynômes

Fonction inverse — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Étudier une fonction qui additionne un polynôme de degré au plus 3 et un terme $\frac{k}{x}$: la dériver terme à terme, réduire la dérivée au même dénominateur x^2 , étudier le signe du numérateur, puis dresser le tableau de variations et trouver l'extremum.

Exercice 1 - Dériver une première combinaison

Calculer la dérivée de $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 - Avec un terme du second degré

Calculer la dérivée de $g(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis $g'(1)$.

Exercice 3 - Avec un terme de degré 3

Calculer la dérivée de $h(x) = 2x^3 + 5 - \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de h .

Exercice 4 - La fonction $x + 9/x$

Soit $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

a) Montrer que $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

Exercice 5 - La fonction $4x + 1/x$

Soit $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier ses variations et déterminer son minimum.

Exercice 6 - La fonction $x^2 + 16/x$

Soit $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

a) Montrer que $f(x) = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$.

b) Résoudre $2x^3 - 16 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

c) En déduire les variations de f et son minimum.

Exercice 7 - Un maximum

Soit $f(x) = -x + 5 - \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $f(x)$ et l'écrire sous la forme d'un quotient.
- b) Dresser le tableau de variations de f .
- c) Calculer $f(1)$ et $f(4)$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1 ; 4]$.

Exercice 8 - Une tangente

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 2.

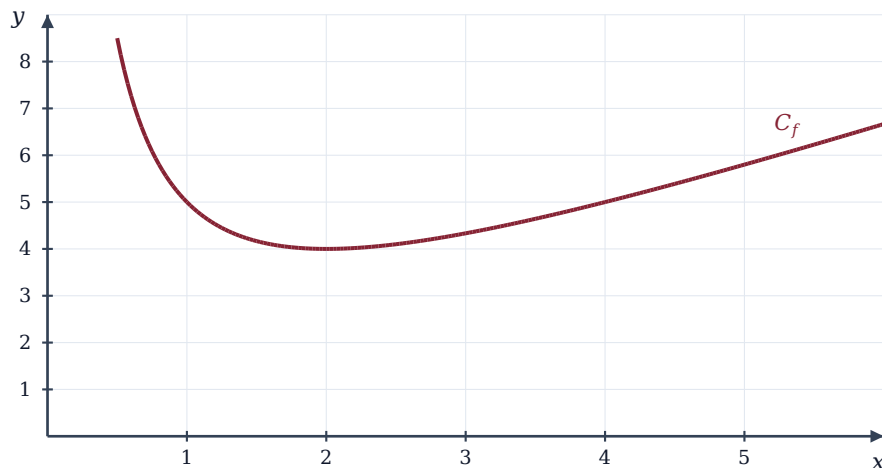
Exercice 9 - Loin de l'origine

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $f(10)$, $f(100)$ et $f(1000)$. Que remarque-t-on ? Que se passe-t-il près de 0 ?

Exercice 10 - Lire puis justifier un minimum

On a tracé la courbe de $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0 ; 6]$.

- a) Lire les coordonnées du point le plus bas de la courbe.
- b) Justifier ce résultat par un calcul de dérivée.



La courbe de $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0 ; 6]$.

Exercice 11 - Une fonction toujours croissante

Soit $f(x) = x - \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a) Montrer que f est strictement croissante.
- b) Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 12 - Résoudre une équation

On veut résoudre $x + \frac{4}{x} = 5$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a) Montrer que l'équation équivaut à $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- b) Vérifier que $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ et conclure.

Exercice 13 - Avec un cube

Soit $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Montrer que $f'(x) = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}$.
- b) Étudier le signe de $x^4 - 1$ sur $]0; +\infty[$.
- c) En déduire le minimum de f .

Exercice 14 - Repérer une erreur de dérivation

Un élève dérive $f(x) = 2x^2 - \frac{5}{x}$ et trouve $f'(x) = 4x - \frac{5}{x^2}$. Corriger son calcul, puis donner le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 15 - Synthèse : une étude sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = 2x + \frac{50}{x}$ sur $[1; 20]$.

- a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2}$.
- b) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[1; 20]$.
- c) Donner le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.