

Plaquette 4 - Coût moyen et prix unitaire

Fonction inverse — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Dès qu'un montant fixe est réparti sur une quantité, un terme $\frac{k}{q}$ apparaît : coût moyen de production, prix d'un abonnement par visite, part de chacun dans une location. On exprime ce coût par unité, on étudie ses variations avec la dérivée et l'on cherche la quantité qui le rend minimal.

Exercice 1 - Un premier coût moyen

Une entreprise a des coûts fixes de 200 € et un coût de 5 € par objet produit : $C(q) = 5q + 200$.

- Exprimer le coût moyen $C_M(q)$.
- Le calculer pour $q = 10, 50$ et 100 .
- De quelle valeur se rapproche-t-il quand q devient grand ?

Exercice 2 - Exprimer un coût moyen

Le coût total de production de q objets est $C(q) = q^2 + 20q + 900$ (en euros). Exprimer le coût moyen et identifier la part due aux coûts fixes.

Exercice 3 - Minimiser le coût moyen

On reprend $C_M(q) = q + 20 + \frac{900}{q}$ pour $q > 0$. Déterminer la production qui minimise le coût moyen, et ce coût minimal.

Exercice 4 - Un atelier de confection

Un atelier fabrique entre 1 et 60 vestes par semaine. Le coût total est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 288$ euros.

- Exprimer le coût moyen $C_M(q)$.
- Étudier ses variations sur $[1 ; 60]$ et déterminer son minimum.

Exercice 5 - Un coût total de degré 3

Le coût total est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 32$ (en centaines d'euros, q en tonnes, $q > 0$).

- Montrer que $C_M'(q) = \frac{2q^3 - 6q^2 - 32}{q^2}$.
- Vérifier que $q^3 - 3q^2 - 16 = (q - 4)(q^2 + q + 4)$.
- En déduire la production qui minimise le coût moyen.

Exercice 6 – Un abonnement amorti

Une salle de sport coûte 300 € d’abonnement annuel, plus 2 € par séance.

- a) Exprimer le coût par séance $c(n)$ pour n séances dans l’année.
- b) À partir de combien de séances ce coût est-il inférieur à 5 € ?

Exercice 7 – Des frais de port répartis

Une boutique en ligne facture 12 € de frais de port par commande, quel que soit le nombre d’articles commandés.

- a) Exprimer les frais de port par article $f(n)$ pour une commande de n articles.
- b) Combien d’articles faut-il commander pour que les frais de port reviennent à moins de 0,50 € par article ?

Exercice 8 – Partager une location

Un gîte se loue 1800 € la semaine ; chaque vacancier paie en plus 25 € de ménage.

- a) Exprimer le prix $p(n)$ payé par chacun pour un groupe de n personnes, et le calculer pour 6, 9 et 12 personnes.
- b) Combien faut-il être au minimum pour payer au plus 200 € chacun ?

Exercice 9 – Un seuil de coût moyen

Le coût moyen d’un produit est $C_M(q) = 8 + \frac{400}{q}$ euros. Pour quelles quantités est-il inférieur ou égal à 10 € ?

Exercice 10 – Coût moyen et coût marginal

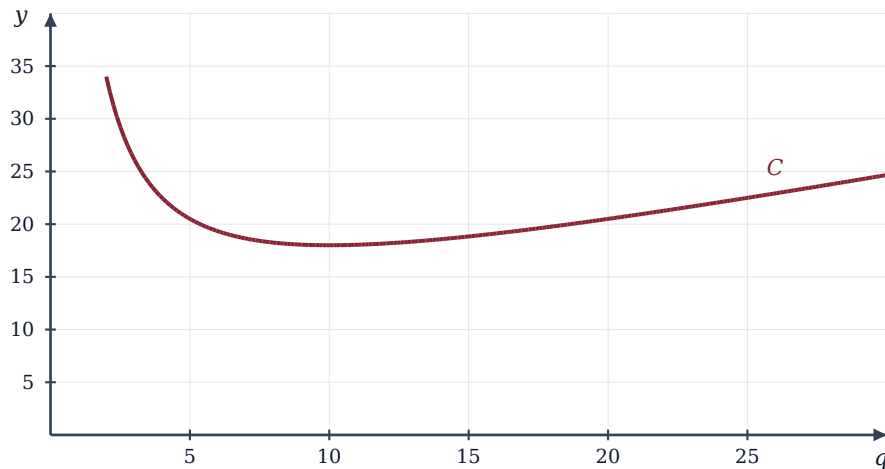
Le coût total est $C(q) = q^2 + 100$.

- a) Déterminer la quantité qui minimise le coût moyen et ce minimum.
- b) Calculer le coût marginal $C'(q)$ pour cette quantité. Que remarque-t-on ?

Exercice 11 - Lire un coût moyen

La courbe représente le coût moyen $C_M(q) = \frac{q}{2} + 8 + \frac{50}{q}$ pour q entre 2 et 30.

- Lire la quantité qui semble minimiser le coût moyen, et ce minimum.
- Le confirmer par le calcul.



Coût moyen $C_M(q)$, en euros, selon la quantité q .

Exercice 12 - Produire avec profit

On reprend $C_M(q) = q + 20 + \frac{900}{q}$, dont le minimum vaut 80 € pour $q = 30$. Chaque objet est vendu 100 €.

- L'entreprise gagne-t-elle de l'argent pour $q = 30$? Combien ?
- Et pour $q = 10$?

Exercice 13 - Une imprimerie

Pour un tirage de q brochures ($q \geq 100$), le coût total est $C(q) = 0,002q^2 + 3q + 2000$ euros. Quel tirage minimise le coût par brochure ?

Exercice 14 - La consommation d'une voiture

Au démarrage à froid, une voiture consomme 0,6 L de surconsommation, puis 0,05 L par kilomètre. Sa consommation moyenne sur un trajet de d km est donc

$c(d) = 0,05 + \frac{0,6}{d}$ litre par kilomètre.

- Calculer la consommation aux 100 km pour des trajets de 10, 100 et 300 km.
- De quelle valeur se rapproche-t-elle pour de très longs trajets ?

Exercice 15 - Synthèse : coût moyen et bénéfice

Une entreprise produit entre 5 et 50 objets. Le coût total est $C(q) = 2q^2 + 10q + 800$ euros, et chaque objet est vendu 120 €.

- Exprimer le coût moyen et dresser son tableau de variations sur $[5; 50]$.
- Quel est le coût moyen minimal ?
- Calculer le bénéfice réalisé pour cette production.