

Plaquette 2 - Dérivée et sens de variation

Fonction inverse — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Retrouver la dérivée de la fonction inverse à partir du taux de variation, calculer des nombres dérivés et des équations de tangentes, puis en déduire le sens de variation de $x \mapsto \frac{k}{x}$ sur chacun des deux intervalles, sans tomber dans le piège « décroissante sur tout son ensemble de définition ».

Exercice 1 - Un taux de variation

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3. Que traduit son signe ?

Exercice 2 - Le nombre dérivé en 2

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et h un réel non nul proche de 0.

- Montrer que $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-1}{2(2+h)}$.
- En déduire le nombre dérivé $f'(2)$.

Exercice 3 - La formule de la dérivée

Soit a un réel non nul. En reprenant la méthode de l'exercice précédent, montrer que $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Exercice 4 - Calculer des nombres dérivés

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer $f'(1)$, $f'(-2)$, $f'(0,5)$ et $f'(10)$. Que remarque-t-on sur leur signe ?

Exercice 5 - La tangente en 1

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 6 - La tangente en 2

Déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 2, puis les points où elle coupe les axes.

Exercice 7 - Le sens de variation

Étudier le signe de la dérivée de la fonction inverse et en déduire son sens de variation. Dresser son tableau de variations sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8 - Repérer une erreur

Un élève écrit : « la fonction inverse a une dérivée négative, donc elle est décroissante sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ ». Montrer que cette affirmation est fausse.

Exercice 9 - Comparer avec le sens de variation

Sans calculer les quotients, comparer $\frac{1}{2,7}$ et $\frac{1}{2,71}$, puis $\frac{1}{-3,1}$ et $\frac{1}{-3,2}$. Vérifier à la calculatrice.

Exercice 10 - Dériver k/x

Calculer la dérivée de $g(x) = \frac{5}{x}$ et de $h(x) = -\frac{2}{x}$, puis donner leur sens de variation sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 11 - Encadrer un inverse

On sait que $2 \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$, puis de $\frac{10}{x}$.

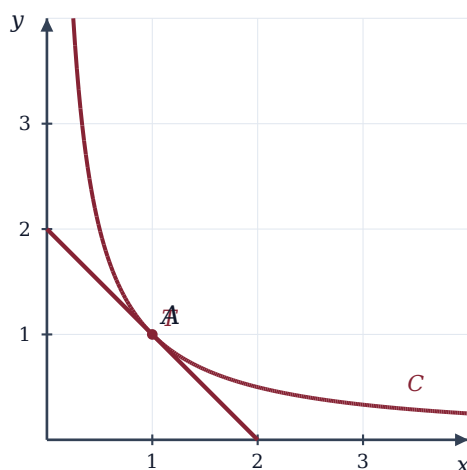
Exercice 12 - Une pente donnée

En quels points de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ la tangente a-t-elle un coefficient directeur égal à $-\frac{1}{4}$? Donner les équations de ces tangentes.

Exercice 13 - Lire une tangente

La droite T est tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point $A(1 ; 1)$.

- Lire graphiquement le coefficient directeur de T .
- Retrouver ce résultat par le calcul.



L'hyperbole et sa tangente T au point $A(1 ; 1)$.

Exercice 14 – Prix unitaire : taux moyen et nombre dérivé

Un lot de marchandises coûte 600 €. Le prix unitaire, quand on répartit ce montant sur x articles, est $p(x) = \frac{600}{x}$.

- a) Calculer le taux de variation de p entre 20 et 30 articles, et l'interpréter.
- b) Calculer $p'(20)$ et l'interpréter.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction $4/x$

Soit $k(x) = \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $k'(x)$ et en déduire le sens de variation de k .
- b) Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 2.
- c) Déterminer les points d'intersection de T avec les axes, puis vérifier que le point de contact est leur milieu.