

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse

Fonction inverse — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Des problèmes complets, dans l'esprit du bac : modéliser une situation (périmètre, emballage, transport, production) par une fonction qui combine un polynôme et un terme $\frac{k}{x}$, l'étudier avec la dérivée, puis répondre à la question posée en revenant au contexte.

Exercice 1 - Un nombre et son inverse

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Étudier les variations de f et déterminer son minimum.
- En déduire que la somme d'un nombre positif et de son inverse vaut toujours au moins 2.
- Déterminer la tangente au point d'abscisse 0,5.

Exercice 2 - Une fonction croissante bornée

Soit $g(x) = 3 - \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que g est strictement croissante.
- Résoudre $g(x) = 0$, puis donner le signe de $g(x)$.
- De quelle valeur $g(x)$ se rapproche-t-il quand x devient très grand ? La dépasse-t-il ?

Exercice 3 - Le rectangle de périmètre minimal

Un enclos rectangulaire doit avoir une aire de 36 m^2 . On note x sa largeur (en m).

- Montrer que son périmètre est $P(x) = 2x + \frac{72}{x}$.
- Déterminer les dimensions qui minimisent le périmètre.

Exercice 4 - Une boîte économe

Une boîte sans couvercle, à base carrée de côté $x \text{ cm}$, doit contenir 32 cm^3 . Sa hauteur est donc $\frac{32}{x^2}$.

- Montrer que la surface de carton utilisée est $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$.
- Déterminer le côté x qui minimise cette surface.

Exercice 5 - Le bus du voyage scolaire

Un bus de 50 places coûte 600 € pour la journée ; chaque élève paie en plus 3 € d'entrée au musée.

- a) Exprimer le prix $c(n)$ payé par chaque élève pour n élèves, puis le calculer pour 20, 40 et 50 élèves.
- b) Combien d'élèves faut-il au minimum pour que le prix ne dépasse pas 20 € ?

Exercice 6 - La vitesse la plus économique

Un camion parcourt 400 km à la vitesse constante v (en km/h), avec $40 \leq v \leq 110$. Le chauffeur est payé 32 € de l'heure, et le carburant coûte $0,005v$ € par kilomètre.

- a) Montrer que le coût du trajet est $C(v) = 2v + \frac{12\,800}{v}$.
- b) Déterminer la vitesse qui minimise ce coût.

Exercice 7 - Retrouver une fonction

La courbe d'une fonction $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ passe par les points (1 ; 5) et (2 ; 4). Déterminer a et b , puis le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 8 - Une tangente qui passe par un point

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et a un réel non nul.

- a) Montrer que la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.
- b) Existe-t-il une tangente qui passe par le point (0 ; 1) ? Par l'origine ?

Exercice 9 - Comparer x et son inverse

Pour quels réels $x > 0$ a-t-on $\frac{1}{x} > x$? Interpréter graphiquement.

Exercice 10 - Une hyperbole et une droite

On cherche les points d'intersection de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ et de la droite $y = -x + 2,5$.

- a) Montrer que leurs abscisses vérifient $x^2 - 2,5x + 1 = 0$.
- b) Vérifier que $x^2 - 2,5x + 1 = (x - 2)(x - 0,5)$ et conclure.

Exercice 11 - Remplir une cuve

Une cuve de 6000 L se remplit avec un débit constant de d litres par minute.

- a) Exprimer la durée de remplissage $t(d)$ en minutes.
- b) On augmente le débit de 20 %. De quel pourcentage la durée diminue-t-elle ?
- c) Quel débit faut-il pour remplir la cuve en 40 minutes au plus ?

Exercice 12 - Combien d'ouvriers ?

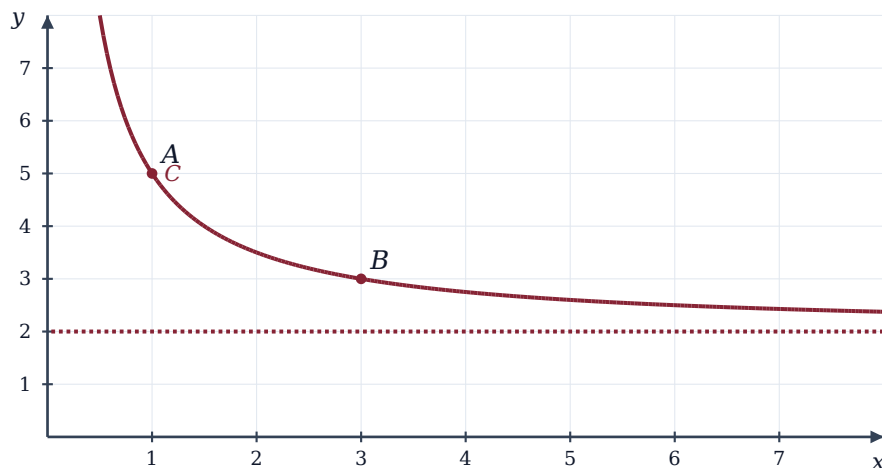
Un chantier demande 120 heures de travail. Avec n ouvriers, il dure $\frac{120}{n}$ heures, mais chaque ouvrier ajoute 2 heures de coordination. La durée totale est modélisée par $T(n) = 2n + \frac{120}{n}$.

- a) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2x + \frac{120}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
 b) Combien d'ouvriers faut-il engager pour que le chantier soit le plus court ?

Exercice 13 - Lire une asymptote

La courbe ci-dessous représente une fonction $f(x) = a + \frac{b}{x}$ sur $]0; 8]$; elle passe par $A(1; 5)$ et $B(3; 3)$.

- a) Déterminer a et b .
 b) Expliquer pourquoi la courbe se rapproche de la droite en pointillés quand x devient grand.



La courbe d'une fonction $x \mapsto a + \frac{b}{x}$ et la droite $y = 2$.

Exercice 14 - Une fonction avec $x^2/2$

Soit $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.
 b) En déduire les variations et le minimum de f .

Exercice 15 - Synthèse : produire des vélos

Une entreprise produit entre 10 et 100 vélos par mois. Le coût total est $C(q) = q^2 + 50q + 2500$ euros, et chaque vélo est vendu 180 €.

- a) Déterminer la production qui minimise le coût moyen, et ce coût moyen.
 b) Le bénéfice est $B(q) = 180q - C(q)$. Montrer que $B(q) = -q^2 + 130q - 2500$ et déterminer la production qui le rend maximal.
 c) Comparer les deux productions optimales. Laquelle l'entreprise doit-elle choisir ?