MATHÉMATIQUES

Fonction inverse

Terminale STMG

Fonction inverse • Hyperbole • Comportement aux bornes • Asymptotes
Dérivée $-\frac{1}{x^2}$ • Sens de variation • Coût moyen • Optimisation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027 ; la partie « Analyse » reprend celle du programme de 2019), partie « Analyse », section « Fonction inverse ». Il couvre :

- comportement de $x \mapsto \frac{1}{x}$ aux bornes de son ensemble de définition, en lien avec les ordres de grandeur ;
- dérivée (à partir du taux de variation) et sens de variation ; courbe représentative et asymptotes (approche intuitive) ;
- étude de fonctions obtenues par combinaison linéaire de $\frac{1}{x}$ et de polynômes de degré au plus 3 : prix unitaire, coût moyen.

Objectif : connaître la fonction inverse (comportement aux bornes, dérivée, variations, courbe) et étudier des fonctions combinant $\frac{1}{x}$ et des polynômes de degré au plus 3.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Comportement aux bornes **3**

2 Dérivée et variations **3**

3 Combinaisons avec des polynômes **4**

4 Erreurs classiques **4**

5 Fiche de synthèse **5**

6 Exercices d'application **5**

7 Corrigés des exercices **5**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Comportement aux bornes

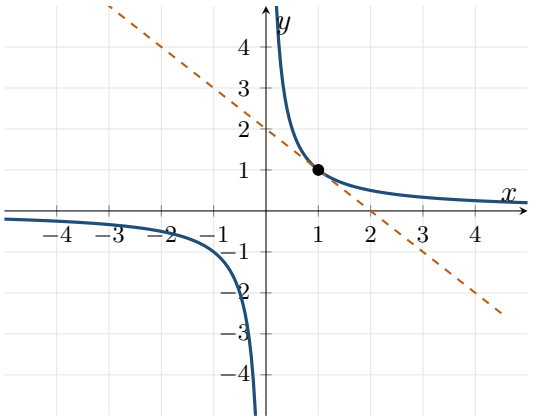
Fonction inverse

La fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ (on ne divise pas par 0).

Ordres de grandeur

— L'inverse d'un très grand nombre est très proche de 0 : $\frac{1}{10^6} = 10^{-6}$. Quand x devient très grand (positif ou négatif), $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.

— L'inverse d'un nombre positif très proche de 0 est très grand : $\frac{1}{0{,}001} = 1\,000$. Quand x se rapproche de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut ; par valeurs négatives, il devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue.



L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$: les axes sont ses asymptotes. En pointillés, la tangente au point $(1\,;1)$, de coefficient directeur -1.

Asymptotes

La courbe se rapproche autant qu'on veut de l'axe des abscisses quand x devient très grand, et de l'axe des ordonnées quand x se rapproche de 0 : ces droites sont des **asymptotes** de la courbe.

2. Dérivée et variations

Dérivée de la fonction inverse

Pour $a \neq 0$ et h petit, le taux de variation vaut

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{h\,a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)},$$

qui se rapproche de $-\frac{1}{a^2}$ quand h se rapproche de 0. Ainsi

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sens de variation

$-\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-1 < 1$ et pourtant $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$).

3. Combinaisons avec des polynômes

Étudier $f(x) = P(x) + \frac{k}{x}$

On dérive $(P'(x) - \frac{k}{x^2})$, on réduit au même dénominateur x^2 (positif), on étudie le signe du numérateur, puis on dresse le tableau de variations.

Coût moyen

Le coût de production de q unités est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (en euros), pour $q \in [1\,;50]$. Le **coût moyen** est

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = q + 10 + \frac{400}{q}, \qquad C'_M(q) = 1 - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 400}{q^2} = \frac{(q-20)(q+20)}{q^2}.$$

Sur $[1\,;50]$, $C'_M(q)$ a le signe de $q - 20$.

q	1		20		50
$C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	411	↘	50	↗	68

Le coût moyen est minimal pour 20 unités : 50 € par unité.

Prix unitaire

Des frais fixes de 1 200 € sont répartis sur x pièces : la part par pièce, $\frac{1\,200}{x}$, diminue quand x augmente, mais ne s'annule jamais.

4. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier que 0 n'a pas d'image.
- Dire que la fonction inverse est décroissante « sur $\mathbb{R}^*$ » : c'est vrai sur chacun des deux intervalles séparément.
- Écrire $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ (oubli du signe).
- Oublier de réduire au même dénominateur avant d'étudier le signe de la dérivée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Fiche de synthèse

Définition	$\frac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
Bornes	proche de 0 quand x est très grand ; très grand quand x est proche de 0
Asymptotes	les deux axes
Dérivée	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; décroissante sur chaque intervalle
Coût moyen	$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$; dériver, réduire au dénominateur q^2

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Dérivée

Dériver $g(x) = 3x^2 - \dfrac{5}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 2 – Variations

Étudier les variations de $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et donner son minimum.

Exercice 3 – Coût moyen

$C(q) = 0{,}5q^2 + 2q + 50$ pour $q \in [1\,;30]$. Exprimer le coût moyen $C_M(q)$ et déterminer la production qui le rend minimal.

Exercice 4 – Ordres de grandeur

Donner $\frac{1}{0{,}000\,2}$ et $\frac{1}{2\times 10^5}$ en écriture scientifique.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $g'(x) = 6x + \dfrac{5}{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$, du signe de $x-3$: f décroît sur $]0\,;3]$, croît sur $[3\,;+\infty[$; minimum $f(3) = 6$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $C_M(q) = 0{,}5q + 2 + \dfrac{50}{q}$; $C'_M(q) = 0{,}5 - \dfrac{50}{q^2} = \dfrac{0{,}5(q^2-100)}{q^2}$, du signe de $q-10$. Minimum pour $q = 10$: $C_M(10) = 5 + 2 + 5 = 12$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\dfrac{1}{2\times 10^{-4}} = 0{,}5\times 10^{4} = 5\times 10^{3}$; $\dfrac{1}{2\times 10^{5}} = 0{,}5\times 10^{-5} = 5\times 10^{-6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).