

Plaquette 1 - Définition, valeurs et ordre de grandeur

Fonction logarithme décimal — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour $b > 0$, le **logarithme décimal** de b , noté $\log(b)$, est l'unique réel x tel que $10^x = b$:

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b) \quad (b > 0)$$

Valeurs à connaître.

b	0,01	0,1	1	10	100	1000
$\log(b)$	-2	-1	0	1	2	3

Pour tout entier n : $\log(10^n) = n$; pour tout $b > 0$: $10^{\log(b)} = b$.

Sens de variation. La fonction $\log$, définie sur $]0; +\infty[$, est strictement **croissante** : $a < b \Leftrightarrow \log(a) < \log(b)$.

Signe. $\log(b) < 0$ si $0 < b < 1$; $\log(1) = 0$; $\log(b) > 0$ si $b > 1$.

Ordre de grandeur. Si $n \leq \log(b) < n + 1$, alors $10^n \leq b < 10^{n+1}$; un entier $b \geq 1$ s'écrit alors avec $n + 1$ chiffres.

Correction de l'exercice 1 - Les puissances de 10

Par définition, $\log(b)$ est l'exposant x tel que $10^x = b$:

$$10^3 = 1000 \Rightarrow \log(1000) = 3$$

$$- 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01, \text{ donc } \log(0,01) = -2 ;$$

$$- 10^0 = 1, \text{ donc } \log(1) = 0 ;$$

$$- 10^1 = 10, \text{ donc } \log(10) = 1.$$

Le logarithme d'une puissance de 10 est son exposant : il « compte les zéros », positivement pour les grands nombres, négativement pour les petits.

Réponse. 3 ; -2 ; 0 ; 1.

Correction de l'exercice 2 - Des valeurs à la calculatrice

La calculatrice donne :

$$\log(2) \approx 0,3010 \quad \log(3) \approx 0,4771 \quad \log(5) \approx 0,6990$$

$$\log(50) \approx 1,6990 \text{ et } \log(0,5) \approx -0,3010.$$

On remarque que $\log(50) = 1 + \log(5)$, car $50 = 10 \times 5$, et que $\log(0,5) = -\log(2)$, car $0,5 = \frac{1}{2}$: ce sont des propriétés du logarithme, étudiées dans la plaquette suivante. Les nombres entre 1 et 10 ont un logarithme entre 0 et 1.

Réponse. $\approx 0,3010$; $0,4771$; $0,6990$; $1,6990$; $-0,3010$.

Correction de l'exercice 3 - Une somme remarquable

La calculatrice donne $0,3010 + 0,6990 = 1$ (à l'arrondi près, exactement 1).

Explication : $10^{\log(2)} = 2$ et $10^{\log(5)} = 5$, donc

$$10^{\log(2) + \log(5)} = 10^{\log(2)} \times 10^{\log(5)} = 2 \times 5 = 10$$

L'exposant $\log(2) + \log(5)$ est donc celui qui donne 10, c'est-à-dire 1. C'est un cas particulier de la propriété $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$: le logarithme transforme un produit en somme.

Réponse. $\log(2) + \log(5) = \log(10) = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver un nombre

À la calculatrice :

$$10^{0,30103} \approx 2,0000 \quad 10^{1,5} \approx 31,6228 \quad 10^{-0,5} \approx 0,3162$$

La fonction $x \mapsto 10^x$ « défait » le logarithme : pour tout $b > 0$, $10^{\log(b)} = b$. Comme $\log(2) \approx 0,30103$, on retrouve 2.

De même, $10^{1,5} = 10 \times 10^{0,5} = 10\sqrt{10}$, donc $\log(31,6228) \approx 1,5$: ce nombre se trouve « à mi-chemin » entre 10 et 100 sur une échelle logarithmique.

Réponse. ≈ 2 ; $\approx 31,6228$; $\approx 0,3162$.

Correction de l'exercice 5 - Comparer sans calculatrice

La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: elle conserve l'ordre.

$$3 < 7 \implies \log(3) < \log(7)$$

(à la calculatrice, $0,477 < 0,845$).

Pour le signe, on compare à 1, dont le logarithme vaut 0 : $0,4 < 1$, donc $\log(0,4) < \log(1) = 0$; $4 > 1$, donc $\log(4) > 0$.

Le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours négatif.

Réponse. $\log(3) < \log(7)$; $\log(0,4) < 0$ et $\log(4) > 0$.

Correction de l'exercice 6 - Un ordre de grandeur

La fonction $x \mapsto 10^x$ est croissante. Si $5 \leq \log(b) < 6$, alors $10^5 \leq b < 10^6$.

Pour 345 000 : $5 \leq 5,538 < 6$, donc

$$10^5 \leq 345\,000 < 10^6$$

c'est un nombre de l'ordre de la centaine de milliers.

Pour 0,0042 : $-3 \leq -2,377 < -2$, donc $10^{-3} \leq 0,0042 < 10^{-2}$, c'est-à-dire entre 0,001 et 0,01. La partie entière (par défaut) du logarithme donne l'ordre de grandeur.

Réponse. $10^5 \leq 345\,000 < 10^6$; $10^{-3} \leq 0,0042 < 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 7 - Compter les chiffres d'un nombre

À la calculatrice, $\log(7,2 \times 10^9) \approx 9,857$. On a donc

$$9 \leq \log(7,2 \times 10^9) < 10 \implies 10^9 \leq 7,2 \times 10^9 < 10^{10}$$

Un entier compris entre 10^9 (qui a 10 chiffres) et 10^{10} (qui en a 11) s'écrit avec 10

chiffres : 7 200 000 000.

Règle : un entier $b \geq 1$ a $n + 1$ chiffres lorsque $n \leq \log(b) < n + 1$.

Réponse. $\log \approx 9,857$: le nombre s'écrit avec 10 chiffres.

Correction de l'exercice 8 - Multiplier par 10

À la calculatrice : $\log(150) \approx 2,176$, $\log(1500) \approx 3,176$ et $\log(15\,000) \approx 4,176$.

Multiplier un nombre par 10 **ajoute** 1 à son logarithme :

$$\log(10 \times b) = \log(10) + \log(b) = 1 + \log(b)$$

La partie décimale (0,176) dépend des chiffres significatifs (15), la partie entière (2, 3, 4) de la position de la virgule. C'est pourquoi les échelles logarithmiques sont graduées de façon régulière par puissances de 10.

Réponse. $\approx 2,176$; $3,176$; $4,176$: on ajoute 1 à chaque fois.

Correction de l'exercice 9 - Le signe d'un logarithme

À la calculatrice :

$$\log(0,2) \approx -0,699 \quad \log(0,8) \approx -0,097 \quad \log(1,2) \approx 0,079$$

Un coefficient inférieur à 1 (baisse) a un logarithme **négatif**, un coefficient supérieur à 1 (hausse) un logarithme **positif**, et $\log(1) = 0$ correspond à une stabilité.

Plus la baisse est forte, plus le logarithme est négatif : 0,2 (baisse de 80 %) a un logarithme bien plus petit que 0,8 (baisse de 20 %).

Réponse. $\approx -0,699$; $-0,097$; $0,079$: négatif pour une baisse, positif pour une hausse.

Correction de l'exercice 10 - La population de la France

À la calculatrice, $\log(68\,000\,000) \approx 7,833$. Comme

$$7 \leq 7,833 < 8$$

on a $10^7 \leq 68\,000\,000 < 10^8$: le nombre s'écrit avec 8 chiffres.

On peut aussi le retrouver : $\log(68 \times 10^6) = \log(68) + 6 \approx 1,833 + 6$. La partie entière 7 donne la puissance de 10, la partie décimale correspond à 68.

Réponse. $\approx 7,833$: 8 chiffres.

Correction de l'exercice 11 - Résoudre une équation $10^x = b$

Par définition du logarithme décimal :

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b)$$

$$10^x = 500 \Leftrightarrow x = \log(500) \approx 2,699.$$

$$10^x = 0,03 \Leftrightarrow x = \log(0,03) \approx -1,523.$$

Contrôle : $10^{2,699} \approx 500$ et $10^{-1,523} \approx 0,03$. La deuxième solution est négative, car $0,03 < 1$.

Réponse. $x = \log(500) \approx 2,699$; $x = \log(0,03) \approx -1,523$.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver un nombre à partir de son logarithme

On utilise $\log(b) = x \Leftrightarrow b = 10^x$:

$$\log(b) = 2,7 \Leftrightarrow b = 10^{2,7} \approx 501,2$$

$$\log(b) = -1,3 \Leftrightarrow b = 10^{-1,3} \approx 0,0501.$$

Le premier nombre est entre 100 et 1000 (logarithme entre 2 et 3), le second entre 0,01 et 0,1 (logarithme entre -2 et -1) : c'est cohérent.

Réponse. $b \approx 501,2$; $b \approx 0,0501$.

Correction de l'exercice 13 - L'acidité d'une boisson

Pour $c = 10^{-4}$:

$$\text{pH} = -\log(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Pour $c = 3,2 \times 10^{-5}$: $\text{pH} = -\log(3,2 \times 10^{-5}) \approx 4,49$.

Plus la concentration en ions H^+ est grande, plus la solution est acide. Ici $10^{-4} > 3,2 \times 10^{-5}$: la première solution est la plus acide, et c'est bien elle qui a le pH le plus bas. Comme $\log$ est croissante, $-\log$ est décroissante.

Réponse. $\text{pH} = 4$ et $\text{pH} \approx 4,49$: la première est la plus acide.

Correction de l'exercice 14 - Même chiffres, autre virgule

On écrit chaque nombre comme 1,2 multiplié par une puissance de 10 :

$$120 = 1,2 \times 10^2 \quad 12\,000 = 1,2 \times 10^4$$

Chaque facteur 10 ajoute 1 au logarithme :

$$- \log(120) = \log(1,2) + 2 \approx 2,079 ;$$

$$- \log(12\,000) = \log(1,2) + 4 \approx 4,079.$$

La calculatrice confirme : $\log(120) \approx 2,079$ et $\log(12\,000) \approx 4,079$.

Réponse. $\log(120) \approx 2,079$; $\log(12\,000) \approx 4,079$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une échelle logarithmique

a) À la calculatrice :

p	1	2	5	10	20	50	100
$\log(p)$	0	0,301	0,699	1	1,301	1,699	2

b) 1 et 10 sont séparés de $\log(10) - \log(1) = 1$ dm, et 10 et 100 aussi de 1 dm :

$$\log(100) - \log(10) = 2 - 1 = 1$$

c) Sur une échelle logarithmique, chaque multiplication par 10 correspond à la même longueur. On peut ainsi représenter lisiblement des valeurs d'ordres de grandeur très différents (de 1 € à 100 €, ou de 1 à un million), ce qui serait impossible sur une échelle ordinaire.

Réponse. a) 0 ; 0,301 ; 0,699 ; 1 ; 1,301 ; 1,699 ; 2 — b) 1 dm dans les deux cas.