

Plaquette 5 – Échelles logarithmiques et problèmes

Fonction logarithme décimal – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Niveau sonore (en décibels, dB), pour une intensité I en W/m^2 :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \text{avec } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB ; la multiplier par 2 ajoute $10 \log 2 \approx 3$ dB.

Magnitude d'un séisme. Un degré de magnitude de plus = une amplitude multipliée par 10.

pH d'une solution de concentration c (en mol/L) en ions oxonium : $\text{pH} = -\log(c)$.

Lire une évolution exponentielle. Si $u_n = k \times a^n$, alors

$$\log(u_n) = \log(k) + n \log(a)$$

Les points $(n ; \log(u_n))$ sont **alignés** sur une droite de pente $\log(a)$. Réciproquement, si $\log(y) = mx + p$, alors $y = 10^p \times (10^m)^x$.

Correction de l'exercice 1 - Le niveau sonore d'une conversation

On calcule le quotient $\frac{I}{10^{-12}}$, puis son logarithme.

$$\text{Conversation : } L = 10 \log \left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \log(10^6) = 60 \text{ dB}$$

— Rue animée : $10 \log(10^7) = 70$ dB ;

— Avion : $10 \log(10^{13}) = 130$ dB.

L'intensité de l'avion est dix millions de fois celle de la conversation, mais l'échelle des décibels ne fait passer que de 60 à 130 : c'est tout l'intérêt d'une échelle logarithmique.

Réponse. 60 dB ; 70 dB ; 130 dB.

Correction de l'exercice 2 - Dix violons au lieu d'un

Dix violons produisent une intensité $10I$. Avec la propriété $\log(10x) = 1 + \log(x)$:

$$10 \log \left(\frac{10I}{I_0} \right) = 10 \left(1 + \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \right) = 10 + 70 = 80 \text{ dB}$$

Cent violons, d'intensité $100I$, donnent de même $20 + 70 = 90$ dB.

Multiplier l'intensité par 10 n'ajoute que 10 dB : un orchestre de cent violons ne « sonne » pas cent fois plus fort à l'oreille.

Réponse. 80 dB ; 90 dB.

Correction de l'exercice 3 - Le seuil de douleur

On résout $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = L$, c'est-à-dire $\frac{I}{10^{-12}} = 10^{\frac{L}{10}}$:

$$I = 10^{-12} \times 10^{\frac{L}{10}}$$

— Pour $L = 120$: $I = 10^{-12} \times 10^{12} = 1 \text{ W/m}^2$.

— Pour $L = 85$: $I = 10^{-12} \times 10^{8,5} = 10^{-3,5} \approx 3,2 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

L'écart de 35 dB correspond à un rapport d'intensités de $10^{3,5} \approx 3162$.

Réponse. 1 W/m^2 ; environ $3,2 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

Correction de l'exercice 4 - Un casque anti-bruit

Si l'intensité est divisée par k , le niveau sonore diminue de $10 \log(k)$ décibels, d'après la propriété du logarithme d'un quotient. On résout :

$$10 \log(k) = 25 \Leftrightarrow \log(k) = 2,5 \Leftrightarrow k = 10^{2,5} \approx 316$$

Le casque divise l'intensité du son par environ 316.

Une baisse de « seulement » 25 dB est donc une protection très efficace : il ne reste qu'environ 0,3 % de l'intensité.

Réponse. Par environ 316.

Correction de l'exercice 5 - Deux séismes

a) $A = A_0 \times 10^M$. Le rapport des amplitudes est

$$\frac{A_0 \times 10^6}{A_0 \times 10^4} = 10^2 = 100$$

b) Avec $\log(50x) = \log(50) + \log(x)$, la magnitude augmente de $\log(50)$:

$$M = 3 + \log(50) \approx 3 + 1,70 = 4,7$$

Deux degrés de magnitude d'écart signifient une amplitude cent fois plus grande.

Réponse. a) 100 fois — b) environ 4,7.

Correction de l'exercice 6 - L'énergie d'un séisme

a) Pour $M = 5$: $\log(E) = 4,8 + 7,5 = 12,3$, donc $E = 10^{12,3} \approx 2,0 \times 10^{12} \text{ J}$.

b) Si M augmente de 1, $\log(E)$ augmente de 1,5 :

$$\frac{E'}{E} = 10^{1,5} \approx 31,6$$

Si M augmente de 2, $\log(E)$ augmente de 3 : l'énergie est multipliée par $10^3 = 1000$.

Un séisme de magnitude 7 libère ainsi mille fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5.

Réponse. a) $\approx 2,0 \times 10^{12} \text{ J}$ — b) $\times 31,6$; $\times 1000$.

Correction de l'exercice 7 - Un séisme majeur

L'écart de magnitude est $9,1 - 7 = 2,1$, donc $\log(E)$ augmente de $1,5 \times 2,1 = 3,15$. Le rapport des énergies vaut :

$$\frac{E_{9,1}}{E_7} = 10^{3,15} \approx 1413$$

Le séisme de 2011 a libéré environ 1400 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 7, lui-même déjà très destructeur.

L'erreur classique est de croire qu'une magnitude 9 est « un peu plus » qu'une magnitude 7 : l'échelle est logarithmique.

Réponse. Environ 1400 fois plus.

Correction de l'exercice 8 - Diluer une solution acide

a) $\text{pH} = -\log(0,01) = -(-2) = 2$.

b) La concentration devient 0,001 : $\text{pH} = -\log(0,001) = 3$. Diviser la concentration par 10 augmente le pH de 1.

c) Avec la propriété du logarithme d'un quotient :

$$-\log\left(\frac{c}{2}\right) = -\log(c) + \log(2) \approx 2 + 0,30 = 2,30$$

Le pH n'augmente que de 0,3 : la solution reste nettement acide.

Réponse. a) 2 — b) 3 — c) environ 2,30.

Correction de l'exercice 9 - Lire une échelle logarithmique

a) Un point situé à d cm correspond à $\log(x) = \frac{d}{2}$, soit $x = 10^{\frac{d}{2}}$:

— à 5,2 cm : $x = 10^{2,6} \approx 398$;

— à 7 cm : $x = 10^{3,5} \approx 3162$.

b) Le milieu est à 5 cm, donc $\log(x) = 2,5$:

$$x = 10^{2,5} = \sqrt{100 \times 1000} \approx 316$$

Ce n'est pas 550 (la moyenne arithmétique) mais 316, la **moyenne géométrique** de 100 et 1000 : sur une échelle logarithmique, le milieu de deux graduations correspond à leur moyenne géométrique.

Réponse. a) ≈ 398 et ≈ 3162 — b) ≈ 316 (moyenne géométrique), pas 550.

Correction de l'exercice 10 - Des points alignés

a) On obtient 3,0792 ; 3,1399 ; 3,2006 ; 3,2613 ; 3,3220. On passe d'une valeur à la suivante en ajoutant toujours 0,0607 : les points $(n; \log(u_n))$ sont alignés.

b) Si $u_{n+1} = q \times u_n$, alors $\log(u_{n+1}) = \log(u_n) + \log(q)$. Ici :

$$\log(q) = 0,0607 \Leftrightarrow q = 10^{0,0607} \approx 1,15$$

Le nombre de clients augmente de 15 % par an. Sur un graphique à échelle logarithmique, une évolution exponentielle se voit comme une droite.

Réponse. a) écarts constants de 0,0607 — b) raison $q \approx 1,15$.

Correction de l'exercice 11 - Un ajustement après changement de variable

a) $\log(N) = 0,04x + 3$, donc $N = 10^{0,04x+3}$. Avec les propriétés des puissances :

$$N = 10^3 \times (10^{0,04})^x \approx 1000 \times 1,0965^x$$

b) Le coefficient multiplicateur annuel est $10^{0,04} \approx 1,0965$: environ +9,65 % par an.

c) En 2025, $x = 15$: $\log(N) = 0,6 + 3 = 3,6$, donc $N = 10^{3,6} \approx 3981$ utilisateurs.

Réponse. a) $N \approx 1000 \times 1,0965^x$ — b) $\approx +9,65$ % par an — c) environ 3981.

Correction de l'exercice 12 - La loi de Moore

On résout $2300 \times 2^{\frac{t}{2}} = 10^{10}$, soit $2^{\frac{t}{2}} = \frac{10^{10}}{2300}$. On prend le logarithme :

$$\frac{t}{2} \log(2) = 10 - \log(2300) \Leftrightarrow t = \frac{2(10 - \log(2300))}{\log(2)} \approx 44,1$$

Le modèle prévoit 10^{10} transistors vers $1971 + 44 = 2015$.

Les processeurs de cette époque comptaient effectivement quelques milliards de transistors : le modèle exponentiel est resté pertinent pendant plus de quarante ans.

Réponse. Vers 2015.

Correction de l'exercice 13 - Superposer des filtres

Avec n filtres, la proportion de lumière transmise est $0,8^n$. On résout $0,8^n < 0,01$:

$$n \log(0,8) < \log(0,01) = -2$$

Comme $\log(0,8) < 0$, le sens change : $n > \frac{-2}{\log(0,8)} \approx 20,6$.

Il faut au moins 21 filtres. Vérification : $0,8^{20} \approx 0,0115$ et $0,8^{21} \approx 0,0092$.

Réponse. Au moins 21 filtres.

Correction de l'exercice 14 - Un téraoctet

a) Avec la propriété du logarithme d'une puissance :

$$\log(2^{40}) = 40 \log(2) \approx 12,04$$

donc $2^{40} = 10^{12,04} \approx 1,1 \times 10^{12}$: environ mille milliards d'octets.

b) Comme $12 \leq \log(2^{40}) < 13$, on a $10^{12} \leq 2^{40} < 10^{13}$: le nombre s'écrit avec 13 chiffres. En effet, $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$.

Réponse. a) $\approx 12,04$, soit $\approx 1,1 \times 10^{12}$ — b) 13 chiffres.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un son qui s'éloigne

a) Si I_1 est l'intensité à 1 m, l'intensité à la distance d est $\frac{I_1}{d^2}$. Avec les propriétés du logarithme :

$$10 \log\left(\frac{I_1}{d^2 I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) - 10 \log(d^2) = 90 - 20 \log(d)$$

b) $L(10) = 90 - 20 = 70$ dB et $L(5) = 90 - 20 \log(5) \approx 76$ dB.

c) On résout $90 - 20 \log(d) = 60$, soit $\log(d) = 1,5$: $d = 10^{1,5} \approx 31,6$ m.

Chaque fois que la distance est multipliée par 10, le niveau baisse de 20 dB.

Réponse. b) 70 dB ; ≈ 76 dB — c) à environ 31,6 m.