

Plaque 2 – Propriétés algébriques

Fonction logarithme décimal – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés (pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier) :

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n \log(a) \quad \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

Conséquences utiles.

Écriture	Résultat
$\log(10^n)$	n
$\log(10a)$	$1 + \log(a)$
$\log\left(\frac{a}{10}\right)$	$\log(a) - 1$

⚠ **Ce qui est faux.** $\log(a + b) \neq \log(a) + \log(b)$ et $\log(a) \times \log(b) \neq \log(ab)$.

Nombre de chiffres de a^n . On calcule $n \log(a)$: si sa partie entière vaut p , le nombre a^n s'écrit avec $p + 1$ chiffres.

Correction de l'exercice 1 – Le logarithme d'un produit

On écrit $6 = 2 \times 3$ et on utilise la propriété du produit :

$$\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$$

La calculatrice donne $\log(6) \approx 0,7782$: l'écart d'un dix-millième vient des arrondis des valeurs données.

Le logarithme transforme une multiplication en addition : c'est ce qui en a fait, pendant des siècles, l'outil de calcul des comptables et des navigateurs, avec les tables de logarithmes.

Réponse. $\log(6) = \log(2) + \log(3) \approx 0,778$.

Correction de l'exercice 2 – Le logarithme d'une puissance

On utilise $\log(a^n) = n \log(a)$:

$$\log(8) = \log(2^3) = 3 \log(2) \approx 0,9030$$

$$\log(1024) = \log(2^{10}) = 10 \log(2) \approx 3,010.$$

Contrôle : 1024 est un peu supérieur à 1000, dont le logarithme vaut 3 ; on trouve bien un logarithme un peu supérieur à 3.

Réponse. $\log(8) \approx 0,903$; $\log(1024) \approx 3,010$.

Correction de l'exercice 3 – Le logarithme d'un quotient

On écrit les nombres comme des quotients :

$$\log(2,5) = \log\left(\frac{5}{2}\right) = \log(5) - \log(2) \approx 0,6990 - 0,3010 = 0,3980$$

$$\log(0,2) = \log\left(\frac{2}{10}\right) = \log(2) - \log(10) \approx 0,3010 - 1 = -0,6990.$$

On aurait aussi pu écrire $0,2 = \frac{1}{5}$, d'où $\log(0,2) = -\log(5)$: les deux calculs concordent.

Réponse. $\log(2,5) \approx 0,398$; $\log(0,2) \approx -0,699$.

Correction de l'exercice 4 - Le nombre de chiffres d'un très grand nombre

On calcule le logarithme avec la propriété des puissances :

$$\log(2^{100}) = 100\log(2) \approx 30,103$$

Comme $30 \leq 30,103 < 31$, on a $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$: 2^{100} s'écrit avec 31 chiffres.

$\log(3^{30}) = 30\log(3) \approx 14,314$, donc $10^{14} \leq 3^{30} < 10^{15}$: 3^{30} s'écrit avec 15 chiffres.

La calculatrice ne peut pas afficher 2^{100} en entier, mais le logarithme donne immédiatement sa taille.

Réponse. 2^{100} : 31 chiffres ; 3^{30} : 15 chiffres.

Correction de l'exercice 5 - Logarithme et évolutions successives

D'après la propriété des puissances :

$$\log(1,05^{20}) = 20\log(1,05) \approx 20 \times 0,02119 \approx 0,4238$$

Le coefficient global est donc $10^{0,4238} \approx 2,653$: le capital est multiplié par environ 2,65 en vingt ans.

Le logarithme transforme vingt multiplications par 1,05 en une seule multiplication par 20 : c'est l'idée qui permettra de calculer une durée inconnue.

Réponse. $20\log(1,05) \approx 0,4238$; coefficient global $\approx 2,653$.

Correction de l'exercice 6 - Simplifier des expressions

On regroupe avant de calculer :

$$a) \log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100) = 2.$$

$$b) \log(500) - \log(5) = \log\left(\frac{500}{5}\right) = \log(100) = 2.$$

$$c) \log(10^7) = 7 \text{ et } 3\log(10) = 3, \text{ donc}$$

$$\log(10^7) - 3\log(10) = 7 - 3 = 4$$

Les propriétés permettent d'obtenir des valeurs exactes sans connaître $\log(4)$ ni $\log(25)$.

Réponse. a) 2 — b) 2 — c) 4.

Correction de l'exercice 7 - Le logarithme d'un inverse

On applique la propriété du quotient avec $a = 1$:

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(1) - \log(b) = 0 - \log(b) = -\log(b)$$

$$\text{Donc } \log\left(\frac{1}{5}\right) = -\log(5) \approx -0,6990.$$

Interprétation : prendre l'inverse change le signe du logarithme. Un coefficient $\frac{1}{5} = 0,2$ (baisse de 80 %) a un logarithme opposé à celui du coefficient 5 (hausse de 400 %).

Réponse. $\log\left(\frac{1}{5}\right) = -\log(5) \approx -0,699$.

Correction de l'exercice 8 - Décomposer un nombre

On combine les propriétés du produit et de la puissance :

$$\log(45) = \log(3^2 \times 5) = 2\log(3) + \log(5) \approx 0,9542 + 0,6990 = 1,6532$$

Contrôle : 45 est entre 10 et 100, donc son logarithme est entre 1 et 2. La calculatrice donne $\log(45) \approx 1,6532$.

Réponse. $\log(45) \approx 1,6532$.

Correction de l'exercice 9 - Une notation scientifique

On sépare le nombre et la puissance de 10 :

$$\log(4 \times 10^{-3}) = \log(4) + \log(10^{-3}) \approx 0,6021 - 3 = -2,3979$$

Comme $-3 \leq -2,3979 < -2$, on a $10^{-3} \leq 0,004 < 10^{-2}$.

En notation scientifique $a \times 10^n$ (avec $1 \leq a < 10$), le logarithme vaut $n + \log(a)$, où $\log(a)$ est compris entre 0 et 1.

Réponse. $\approx -2,3979$; $10^{-3} \leq 0,004 < 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 10 - Vrai ou faux

a) **Faux** : contre-exemple $a = b = 5$: $\log(10) = 1$, mais $\log(5) + \log(5) \approx 1,398$. La propriété concerne le **produit**, pas la somme.

b) **Vrai** : c'est la propriété $\log(a^n) = n\log(a)$.

c) **Vrai** : $\log(100a) = \log(100) + \log(a) = 2 + \log(a)$.

d) **Faux** : contre-exemple $a = b = 10$: $\log(10) \times \log(10) = 1$ alors que $\log(100) = 2$

Le logarithme transforme un produit en somme, pas en produit.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai — d) faux.

Correction de l'exercice 11 - Doubler l'intensité d'un son

Pour $I = 10^{-6}$:

$$L = 10\log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10\log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}$$

Pour une intensité double, $\frac{I}{I_0} = 2 \times 10^6$, donc $L = 10(\log(2) + 6) \approx 10 \times 6,301 \approx 63 \text{ dB}$.

Doubler l'intensité ajoute $10\log(2) \approx 3 \text{ dB}$, quel que soit le niveau de départ : deux machines identiques font 3 dB de plus qu'une seule, et non deux fois plus de décibels.

Réponse. 60 dB, puis environ 63 dB : +3 dB.

Correction de l'exercice 12 - Un ordre de grandeur

Avec la propriété du produit :

$$\log(1,2 \times 10^{15}) = \log(1,2) + 15 \approx 0,079 + 15 = 15,079$$

Comme $15 \leq 15,079 < 16$, le nombre est compris entre 10^{15} et 10^{16} : il s'écrit avec 16 chiffres.

La partie entière du logarithme donne la puissance de 10, la partie décimale les chiffres significatifs.

Réponse. $\approx 15,079$: 16 chiffres.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur

Première erreur. Le logarithme d'un produit est une **somme** :

$$\log(20) = \log(2) + \log(10) \approx 0,301 + 1 = 1,301$$

La valeur 0,301 est absurde : $20 > 10$, donc $\log(20) > 1$.

Seconde erreur. L'exposant passe **devant** le logarithme : $\log(2^5) = 5 \log(2) \approx 1,505$. L'écriture $\log(2)^5 \approx 0,0025$ n'a rien à voir ; or $2^5 = 32$, dont le logarithme est bien environ 1,505.

Réponse. $\log(20) \approx 1,301$; $\log(2^5) = 5 \log(2) \approx 1,505$.

Correction de l'exercice 14 - Exprimer avec log 2

On décompose chaque nombre à l'aide de 2 et de 10 :

- $\log(16) = \log(2^4) = 4 \log(2)$;
- $\log(0,5) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$;
- $\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \log(2)$;
- $\log(40) = \log(4 \times 10) = 2 \log(2) + 1$.

Avec $\log(2) \approx 0,301$:

$$\log(5) \approx 0,699 \quad \log(40) \approx 1,602$$

Réponse. $4 \log 2$; $-\log 2$; $1 - \log 2$; $1 + 2 \log 2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : dix ans de placement

a) Avec la propriété des puissances :

$$\log(1,03^{10}) = 10 \log(1,03) \approx 10 \times 0,01284 = 0,1284$$

b) Le coefficient est $10^{0,1284} \approx 1,3439$, ce que confirme le calcul direct $1,03^{10} \approx 1,3439$.

c) $5000 \times 1,3439 \approx 6719,58$ €, supérieur à 6500 € : oui.

On aurait pu raisonner sur les logarithmes : la fonction log est croissante, et $\log(6719,58) > \log(6500)$.

Réponse. a) $\approx 0,1284$ — b) $\approx 1,3439$ — c) oui, environ 6719,58 €.