

Plaquette 3 – Résoudre $a^x = b$ et $a^n < b$

Fonction logarithme décimal – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). On applique $\log$, fonction strictement croissante, aux deux membres :

$$a^x = b \Leftrightarrow x \log(a) = \log(b) \Leftrightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Équation $x^a = b$ ($x > 0$) : $x = b^{\frac{1}{a}}$ (taux moyen).

Inéquation $a^n > b$, n entier.

Base	$\log(a)$	$a^n > b \Leftrightarrow$
$a > 1$	positif	$n > \frac{\log(b)}{\log(a)}$
$0 < a < 1$	négatif	$n < \frac{\log(b)}{\log(a)}$ (le sens change)

Pour $a^n < b$, on inverse toutes les inégalités du tableau.

Toujours conclure avec le plus petit entier qui convient, puis le vérifier en calculant a^n pour cet entier et le précédent.

Correction de l'exercice 1 – Une première équation

On applique le logarithme aux deux membres, puis la propriété des puissances :

$$2^x = 50 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(50) \Leftrightarrow x \log(2) = \log(50)$$

Comme $\log(2) \neq 0$: $x = \frac{\log(50)}{\log(2)} \approx 5,644$.

Vérification : $2^{5,644} \approx 50$. C'est cohérent avec $2^5 = 32 < 50 < 64 = 2^6$: la solution est bien entre 5 et 6.

Réponse. $x = \frac{\log 50}{\log 2} \approx 5,644$.

Correction de l'exercice 2 – Le temps de doublement

On prend le logarithme des deux membres :

$$1,05^x = 2 \Leftrightarrow x \log(1,05) = \log(2) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2)}{\log(1,05)} \approx 14,207$$

Le capital double en environ 14,2 ans, soit 14 ans et environ 2,5 mois. Comme les intérêts sont versés une fois par an, il faudra en pratique attendre la quinzième année.

Le résultat ne dépend pas du capital de départ : 1000 € ou 50 000 € doublent dans le même temps.

Réponse. $x = \frac{\log 2}{\log 1,05} \approx 14,2$ ans.

Correction de l'exercice 3 - Une base inférieure à 1

Même méthode :

$$0,8^x = 0,3 \Leftrightarrow x \log(0,8) = \log(0,3) \Leftrightarrow x = \frac{\log(0,3)}{\log(0,8)} \approx 5,396$$

Les deux logarithmes sont négatifs, leur quotient est positif.

Interprétation : une valeur qui perd 20 % par an tombe à 30 % de sa valeur de départ en environ 5,4 ans.

Réponse. $x \approx 5,396$.

Correction de l'exercice 4 - Une inéquation avec un entier

La fonction log est croissante : elle conserve le sens de l'inégalité.

$$1,03^n > 1,5 \Leftrightarrow n \log(1,03) > \log(1,5)$$

Or $\log(1,03) > 0$, donc on divise sans changer le sens : $n > \frac{\log(1,5)}{\log(1,03)} \approx 13,72$.

Le plus petit entier qui convient est $n = 14$. Vérification : $1,03^{13} \approx 1,4685$ et $1,03^{14} \approx 1,5126$. Le prix aura augmenté de plus de 50 % au bout de 14 ans.

Réponse. $n \geq 14$.

Correction de l'exercice 5 - Le sens qui change

On prend le logarithme, ce qui conserve le sens :

$$0,9^n < 0,5 \Leftrightarrow n \log(0,9) < \log(0,5)$$

Attention : $\log(0,9) < 0$. En divisant par un nombre **négatif**, on **change le sens** :

$$n > \frac{\log(0,5)}{\log(0,9)} \approx 6,58.$$

Le plus petit entier est $n = 7$. Vérification : $0,9^6 \approx 0,5314 > 0,5$ et $0,9^7 \approx 0,4783 < 0,5$. La machine vaut moins de la moitié de sa valeur au bout de 7 ans.

Réponse. $n \geq 7$.

Correction de l'exercice 6 - Une équation $x^a = b$

L'inconnue est ici la **base**. On élève à la puissance inverse :

$$x^3 = 1,331 \Leftrightarrow x = 1,331^{\frac{1}{3}} = 1,1$$

$$x^4 = 1,5 \Leftrightarrow x = 1,5^{\frac{1}{4}} \approx 1,10668.$$

Ce sont exactement des calculs de taux moyen : une hausse de 33,1 % en trois ans correspond à 10 % par an, une hausse de 50 % en quatre ans à environ 10,67 % par an. Le logarithme sert quand l'inconnue est l'**exposant** ; l'exposant $\frac{1}{n}$, quand c'est la **base**.

Réponse. $x = 1,1$; $x \approx 1,10668$.

Correction de l'exercice 7 - Isoler la puissance d'abord

On isole d'abord la puissance en divisant par 5 :

$$5 \times 1,2^x = 20 \Leftrightarrow 1,2^x = 4$$

Puis on prend le logarithme : $x \log(1,2) = \log(4)$, d'où

$$x = \frac{\log(4)}{\log(1,2)} \approx 7,604$$

Vérification : $5 \times 1,2^{7,604} \approx 20$. Prendre le logarithme avant d'isoler la puissance donnerait $\log(5) + x \log(1,2) = \log(20)$, qui conduit au même résultat, mais avec un calcul plus long.

Réponse. $x \approx 7,604$.

Correction de l'exercice 8 - Des solutions exactes

On utilise $10^y = b \Leftrightarrow y = \log(b)$, puis l'on résout l'équation du premier degré obtenue :

$$10^{2x} = 1000 \Leftrightarrow 2x = \log(1000) = 3 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$10^{x+1} = 0,01 \Leftrightarrow x + 1 = \log(0,01) = -2 \Leftrightarrow x = -3.$$

Contrôles : $10^3 = 1000$ et $10^{-2} = 0,01$.

Réponse. $x = 1,5$; $x = -3$.

Correction de l'exercice 9 - Une solution négative

On prend le logarithme :

$$3^x = 0,1 \Leftrightarrow x \log(3) = \log(0,1) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\log(3)} \approx -2,096$$

La solution est négative car $0,1 < 1 = 3^0$: la fonction $x \mapsto 3^x$ est croissante et ne prend des valeurs inférieures à 1 que pour $x < 0$.

Vérification : $3^{-2,096} \approx 0,1$.

Réponse. $x = -\frac{1}{\log 3} \approx -2,096$.

Correction de l'exercice 10 - Une inéquation à solution réelle

On applique le logarithme, fonction croissante :

$$1,07^x \geq 3 \Leftrightarrow x \log(1,07) \geq \log(3)$$

$$\log(1,07) > 0, \text{ donc } x \geq \frac{\log(3)}{\log(1,07)} \approx 16,238.$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{\log 3}{\log 1,07} ; +\infty \right[$. Une grandeur qui augmente de 7 % par an triple en un peu plus de 16 ans.

Réponse. $x \geq \frac{\log 3}{\log 1,07} \approx 16,238$.

Correction de l'exercice 11 - Un stock qui s'écoule

On résout $2000 \times 0,85^n < 500$, soit $0,85^n < 0,25$. Avec le logarithme :

$$n \log(0,85) < \log(0,25)$$

$$\log(0,85) < 0, \text{ donc le sens change : } n > \frac{\log(0,25)}{\log(0,85)} \approx 8,53.$$

Le plus petit entier est $n = 9$. Vérification : $2000 \times 0,85^8 \approx 544,98$ et $2000 \times 0,85^9 \approx 463,23$. Le stock passe sous 500 pièces au cours du neuvième mois.

Réponse. Au bout de 9 mois.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur de sens

L'erreur. $\log(0,9)$ est **négatif** (car $0,9 < 1$). Diviser une inégalité par un nombre négatif change son sens :

$$n \log(0,9) < \log(0,6) \Leftrightarrow n > \frac{\log(0,6)}{\log(0,9)} \approx 4,85$$

La bonne conclusion est $n \geq 5$.

Contrôle. $0,9^4 \approx 0,6561$ n'est pas inférieur à 0,6, alors que $0,9^5 \approx 0,5905$ l'est. La réponse de l'élève était absurde : avec $n = 0$, on aurait $0,9^0 = 1 < 0,6$, ce qui est faux.

Réponse. $n > \frac{\log 0,6}{\log 0,9}$, donc $n \geq 5$.

Correction de l'exercice 13 - Un taux mensuel

L'inconnue est la base : on élève à la puissance $\frac{1}{12}$.

$$x^{12} = 1,12 \Leftrightarrow x = 1,12^{\frac{1}{12}} \approx 1,009489$$

Interprétation : x est le coefficient mensuel équivalent à une hausse annuelle de 12 %. Douze hausses mensuelles d'environ 0,95 % donnent une hausse annuelle de 12 %.

Réponse. $x = 1,12^{\frac{1}{12}} \approx 1,009489$.

Correction de l'exercice 14 - Atteindre un montant

On résout $1500 \times 1,04^n > 2400$, soit $1,04^n > 1,6$ en divisant par 1500. Puis :

$$n \log(1,04) > \log(1,6) \Leftrightarrow n > \frac{\log(1,6)}{\log(1,04)} \approx 11,98$$

car $\log(1,04) > 0$. Le plus petit entier est $n = 12$.

Vérification : $1500 \times 1,04^{11} \approx 2309,18$ € et $1500 \times 1,04^{12} \approx 2401,55$ €. Le capital dépasse 2400 € au bout de 12 ans, de justesse.

Réponse. Au bout de 12 ans.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : doubler ou tripler

a) $1,06^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1,06} \approx 11,9$ ans ; $1,06^x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 1,06} \approx 18,85$ ans.

b) Il faut 12 ans pour au moins doubler ($1,06^{12} \approx 2,0122$) et 19 ans pour au moins tripler ($1,06^{19} \approx 3,0256$).

c) Non : 18,85 n'est pas le double de 11,9. Le rapport des deux durées vaut

$$\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$$

Doubler puis doubler encore donnerait un quadruplement en $2 \times 11,9 \approx 23,8$ ans ; tripler demande moins de temps que quadrupler.

Réponse. a) $\approx 11,9$ et 18,85 ans — b) 12 et 19 ans — c) non, rapport $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$.