

Plaquette 4 - Seuils, durées et temps de doublement

Fonction logarithme décimal — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La méthode.

1. Écrire le modèle : $f(n) = k \times a^n$, avec $a = 1 + \frac{t}{100}$. 2. Traduire la question : $f(n) = S$ (durée réelle) ou $f(n) > S$, $f(n) < S$ (durée entière). 3. Diviser par k pour isoler a^n , puis prendre le logarithme :

$$a^n = \frac{S}{k} \Leftrightarrow n = \frac{\log\left(\frac{S}{k}\right)}{\log(a)}$$

4. Pour une inéquation, diviser par $\log(a)$, en **changeant le sens** si $a < 1$. 5. Conclure avec le plus petit entier qui convient, et le vérifier.

Temps de doublement pour un taux de $t\%$: $n = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$. Il ne dépend pas de la valeur de départ ; la « règle de 72 » en donne une approximation : $n \approx \frac{72}{t}$.

Correction de l'exercice 1 - Une population qui grandit

Une hausse de 25 % correspond au coefficient 1,25. On résout $1,012^n \geq 1,25$ (la population de départ n'intervient pas) :

$$n \log(1,012) \geq \log(1,25) \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(1,25)}{\log(1,012)} \approx 18,71$$

car $\log(1,012) > 0$. Le plus petit entier est 19.

La population aura augmenté d'au moins 25 % au bout de 19 ans, soit au moins 50 000 habitants. Vérification : $1,012^{18} \approx 1,2395$ et $1,012^{19} \approx 1,2544$.

Réponse. Au bout de 19 ans.

Correction de l'exercice 2 - Des abonnés à conquérir

On résout $3000 \times 1,08^x = 10\,000$, soit $1,08^x = \frac{10}{3}$:

$$x = \frac{\log\left(\frac{10}{3}\right)}{\log(1,08)} \approx 15,64$$

L'application atteindra 10 000 abonnés au bout d'environ 15,6 mois, c'est-à-dire au cours du seizième mois.

Contrôle : $3000 \times 1,08^{15} \approx 9517$ et $3000 \times 1,08^{16} \approx 10\,278$.

Réponse. Environ 15,6 mois, au cours du seizième mois.

Correction de l'exercice 3 - Une voiture qui perd de la valeur

On résout $18\,000 \times 0,88^n < 6000$, soit $0,88^n < \frac{1}{3}$:

$$n \log(0,88) < \log\left(\frac{1}{3}\right)$$

Comme $\log(0,88) < 0$, le sens change : $n > \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log(0,88)} \approx 8,59$. Le plus petit entier est 9.

Vérification : $18\,000 \times 0,88^8 \approx 6473$ € et $18\,000 \times 0,88^9 \approx 5697$ €. La voiture vaudra moins de 6000 € au bout de 9 ans.

Réponse. Au bout de 9 ans.

Correction de l'exercice 4 - Le seuil d'une suite géométrique

On a $u_n = 500 \times 1,15^n$. On résout $500 \times 1,15^n > 5000$, soit $1,15^n > 10$:

$$n \log(1,15) > \log(10) = 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log(1,15)} \approx 16,48$$

Le plus petit entier est $n = 17$.

Le logarithme remplace ici l'algorithme de seuil : on obtient le rang directement, sans calculer tous les termes. Vérification : $u_{16} \approx 4679$ et $u_{17} \approx 5381$.

Réponse. $n = 17$.

Correction de l'exercice 5 - Doubler un capital

Le temps de doublement est la solution de $1,03^x = 2$:

$$x = \frac{\log(2)}{\log(1,03)} \approx 23,45$$

Le capital double en environ 23,45 ans ; avec des intérêts versés une fois par an, il faut attendre 24 ans pour qu'il ait au moins doublé.

Ce temps ne dépend pas du capital placé : 500 € ou 50 000 € doublent dans le même délai.

Réponse. Environ 23,45 ans, soit 24 années entières.

Correction de l'exercice 6 - La règle de 72

Le calcul exact donne la solution de $1,07^x = 2$:

$$x = \frac{\log(2)}{\log(1,07)} \approx 10,24$$

La règle de 72 donne $\frac{72}{7} \approx 10,29$ ans.

L'écart est inférieur à un mois : la règle est une très bonne approximation pour des taux de quelques pourcents. Elle permet d'estimer de tête un temps de doublement ; le logarithme donne la valeur précise.

Réponse. Exact : $\approx 10,24$ ans ; règle de 72 : $\approx 10,29$ ans.

Correction de l'exercice 7 - Doubler en huit ans

L'inconnue est cette fois le coefficient a (la base). On résout $a^8 = 2$:

$$a = 2^{\frac{1}{8}} \approx 1,09051$$

Il faut un taux d'environ 9,05 % par an.

La règle de 72 donne une approximation proche : $\frac{72}{8} = 9$ %. Quand l'inconnue est la base,

on utilise l'exposant $\frac{1}{n}$; quand c'est l'exposant, on utilise le logarithme.

Réponse. Environ 9,05 % par an.

Correction de l'exercice 8 – L'élimination d'un médicament

On résout $0,75^n < 0,1$:

$$n \log(0,75) < \log(0,1) = -1$$

$$\log(0,75) < 0, \text{ donc le sens change : } n > \frac{-1}{\log(0,75)} \approx 8,004.$$

Le plus petit entier est $n = 9$. Vérification : $0,75^8 \approx 0,1001$, encore un peu au-dessus de 10 %, et $0,75^9 \approx 0,0751$. Il faut attendre 9 heures : le calcul montre l'importance de vérifier l'entier de part et d'autre.

Réponse. Au bout de 9 heures.

Correction de l'exercice 9 – Moins de 1 % d'un déchet

Après n demi-vies, il reste la proportion $0,5^n$. On résout $0,5^n < 0,01$:

$$n \log(0,5) < \log(0,01) = -2 \Rightarrow n > \frac{-2}{\log(0,5)} \approx 6,64$$

(le sens change, car $\log(0,5) < 0$).

Il faut plus de 6,64 demi-vies, soit plus de 66,4 ans : en nombre entier de demi-vies, 7, c'est-à-dire 70 ans. Il faut près de sept demi-vies pour qu'il reste moins d'un centième d'une substance.

Réponse. Plus de 66,4 ans (environ 7 demi-vies).

Correction de l'exercice 10 – Deux placements qui se croisent

On résout $2000 \times 1,05^n > 3000 \times 1,02^n$. On divise par $2000 \times 1,02^n > 0$:

$$\left(\frac{1,05}{1,02}\right)^n > 1,5 \Rightarrow n > \frac{\log(1,5)}{\log\left(\frac{1,05}{1,02}\right)} \approx 13,99$$

car $\frac{1,05}{1,02} > 1$. Le plus petit entier est 14.

Le placement A dépasse B à partir de la quatorzième année. Regrouper les deux puissances de même exposant ramène le problème à une seule équation $a^n = b$.

Réponse. À partir de la quatorzième année.

Correction de l'exercice 11 – Le pouvoir d'achat divisé par deux

Les prix doublent quand $1,02^x = 2$:

$$x = \frac{\log(2)}{\log(1,02)} \approx 35,0$$

Au bout d'environ 35 ans, les prix ont doublé. Une somme fixe (une épargne non placée, une pension non revalorisée) ne permet alors plus d'acheter que la moitié de ce qu'elle achetait au départ.

Une inflation qui paraît faible (2 %) divise donc le pouvoir d'achat par deux en une génération.

Réponse. Environ 35 ans ; le pouvoir d'achat d'une somme fixe est divisé par 2.

Correction de l'exercice 12 - Une dette qui augmente

« Augmenter de plus de moitié » signifie être multipliée par plus de 1,5. On résout $1,05^n > 1,5$:

$$n > \frac{\log(1,5)}{\log(1,05)} \approx 8,31$$

Le plus petit entier est 9 : au bout de 9 ans, la dette a augmenté de plus de 50 %.

Vérification : $1,05^8 \approx 1,4775$ et $1,05^9 \approx 1,5513$.

Réponse. Au bout de 9 ans.

Correction de l'exercice 13 - Dater un objet

On résout $0,5^{\frac{x}{5730}} = 0,6$. On prend le logarithme :

$$\frac{x}{5730} \log(0,5) = \log(0,6) \Leftrightarrow x = 5730 \times \frac{\log(0,6)}{\log(0,5)} \approx 4223$$

L'objet a environ 4200 ans.

Contrôle : moins d'une demi-vie s'est écoulée, puisqu'il reste plus de 50 % du carbone 14. C'est le principe de la datation au carbone 14, utilisée en archéologie.

Réponse. Environ 4200 ans.

Correction de l'exercice 14 - Un objectif d'épargne

On résout $1,025^n \geq 1,25$:

$$n \geq \frac{\log(1,25)}{\log(1,025)} \approx 9,04$$

Le plus petit entier est 10. Vérification : $1,025^9 \approx 1,2489$ (pas tout à fait 25 %) et $1,025^{10} \approx 1,2801$.

L'erreur fréquente consiste à répondre $\frac{25}{2,5} = 10$ par un calcul linéaire : le résultat tombe juste ici, mais par hasard, et le raisonnement est faux.

Réponse. Au bout de 10 ans.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : prix et ventes

a) $1,04^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1,04} \approx 17,67$ ans.

b) $0,95^x = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,5}{\log 0,95} \approx 13,51$ ans.

c) Le chiffre d'affaires est multiplié chaque année par $1,04 \times 0,95 = 0,988$: il **diminue** d'environ 1,2 % par an. Il est divisé par 2 quand

$$0,988^x = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,5}{\log 0,988} \approx 57,4$$

soit au bout d'environ 57 ans : la baisse est lente, mais réelle.

Réponse. a) $\approx 17,67$ ans — b) $\approx 13,51$ ans — c) baisse de 1,2 % par an, divisé par 2 en $\approx 57,4$ ans.