

Plaquette 5 – Modéliser des évolutions

Fonctions exponentielles – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle. Une grandeur qui vaut k à l'instant 0 et qui évolue d'un pourcentage constant $t\%$ par période vaut, après x périodes :

$$f(x) = k \times a^x \quad \text{avec } a = 1 + \frac{t}{100}$$

($a > 1$ pour une hausse, $0 < a < 1$ pour une baisse).

Durées. x peut être décimal (six mois = 0,5 an) ou négatif ($x = -3$: trois périodes avant l'instant 0).

Changer de période. Si a est un coefficient annuel, le coefficient mensuel est $a^{\frac{1}{12}}$ et le coefficient sur p années est a^p .

Demi-vie. Si une quantité est divisée par 2 tous les T ans, alors $f(x) = k \times 0,5^{\frac{x}{T}}$.

Esprit critique. Un modèle exponentiel suppose un pourcentage d'évolution constant ; il cesse d'être réaliste quand la grandeur sature ou quand le contexte change.

Correction de l'exercice 1 – Une population en croissance

a) Valeur initiale $k = 68\,000$, coefficient annuel $a = 1,006$:

$$P(x) = 68\,000 \times 1,006^x$$

b) Six mois font $x = 0,5$: $P(0,5) = 68\,000 \times 1,006^{0,5} \approx 68\,204$ habitants.

Quatre ans et demi font $x = 4,5$: $P(4,5) \approx 69\,855$ habitants.

On arrondit à l'unité, puisqu'on compte des personnes. La croissance est lente : environ 1 855 habitants de plus en quatre ans et demi.

Réponse. a) $P(x) = 68\,000 \times 1,006^x$ — b) environ 68 204 et 69 855 habitants.

Correction de l'exercice 2 – Une demi-vie

a) Toutes les 8 heures, on multiplie par 0,5. Au bout de t heures, il s'est écoulé $\frac{t}{8}$ périodes de 8 heures, d'où

$$Q(t) = 100 \times 0,5^{\frac{t}{8}}$$

b) $Q(12) = 100 \times 0,5^{1,5} \approx 35,36$ mg.

c) $0,5^{\frac{t}{8}} = \left(0,5^{\frac{1}{8}}\right)^t$, et $0,5^{\frac{1}{8}} \approx 0,917$: la quantité est multipliée par environ 0,917 chaque heure, soit une baisse d'environ 8,3 % par heure.

Réponse. b) environ 35,36 mg — c) environ 0,917 (–8,3 % par heure).

Correction de l'exercice 3 – La décote d'un smartphone

La valeur après x années est $V(x) = 900 \times 0,75^x$.

a) Dix-huit mois font $x = 1,5$:

$$V(1,5) = 900 \times 0,75^{1,5} \approx 584,57 \text{ €}$$

b) $V(3) = 900 \times 0,75^3 = 900 \times 0,421875 \approx 379,69 \text{ €}$. Le smartphone a perdu $1 - 0,421875 \approx 57,8\%$ de sa valeur.

Un modèle à pourcentage constant décrit bien la décote d'un appareil électronique, qui perd une part fixe de sa valeur chaque année.

Réponse. a) environ 584,57 € — b) environ 379,69 €, soit 57,8 % de perte.

Correction de l'exercice 4 - Du taux annuel au taux mensuel

a) Le coefficient mensuel c vérifie $c^{12} = 1,12$:

$$c = 1,12^{\frac{1}{12}} \approx 1,00949$$

soit une hausse d'environ 0,95 % par mois.

b) Dans un mois : $5000 \times 1,00949 \approx 5047$ abonnés.

Deux ans et demi font $x = 2,5$ années : $5000 \times 1,12^{2,5} \approx 6638$ abonnés. On peut aussi compter 30 mois : $5000 \times c^{30}$ donne le même résultat, puisque $c^{30} = 1,12^{\frac{30}{12}} = 1,12^{2,5}$.

Réponse. a) $\approx 1,00949$ — b) environ 5047, puis 6638 abonnés.

Correction de l'exercice 5 - Le coût d'une matière première

a) Avec $C(x) = 3 \times 1,15^x$:

x	0	1	2	3	4
C(x)	3	3,45	3,968	4,563	5,247

(arrondis : $3 \times 1,15^2 = 3,9675$).

b) Une hausse de 7,24 % correspond au coefficient 1,0724. Or

$$1,15^{0,5} \approx 1,0724$$

Le prix augmente de 7,24 % en une demi-année, soit 6 mois.

Réponse. a) 3 ; 3,45 ; 3,968 ; 4,563 ; 5,247 — b) en 6 mois.

Correction de l'exercice 6 - Un loyer indexé chaque trimestre

Trois ans et trois mois font $x = 3 + \frac{3}{12} = 3,25$ années :

$$L(3,25) = 1200 \times 1,02^{3,25} \approx 1279,77 \text{ €}$$

Contrôle de vraisemblance : $L(3) = 1200 \times 1,02^3 \approx 1273,45 \text{ €}$ et $L(4) \approx 1298,92 \text{ €}$; la valeur trouvée est bien entre les deux, plus proche de $L(3)$.

Réponse. Environ 1279,77 €.

Correction de l'exercice 7 - Deux villes qui se croisent

a) $A(x) = 30\,000 \times 0,98^x$, décroissante (base $0,98 < 1$) ; $B(x) = 18\,000 \times 1,03^x$, croissante (base $1,03 > 1$).

b) À la calculatrice, arrondi à l'unité :

x	9	10	11
A(x)	25 012	24 512	24 022
B(x)	23 486	24 190	24 916

Comme A décroît et B croît, une fois que B dépasse A, il reste au-dessus. $B(10) < A(10)$ mais $B(11) > A(11)$:

$$B(11) \approx 24\,916 > A(11) \approx 24\,022$$

La ville B devient plus peuplée à partir de la onzième année.

Réponse. B dépasse A à partir de la onzième année.

Correction de l'exercice 8 - Le pouvoir d'un billet

Les prix sont multipliés par 1,02 chaque année, donc par

$$1,02^{10} \approx 1,219$$

en dix ans. Un panier qui coûte 100 € aujourd'hui coûtera environ 121,90 €.

Le billet de 100 € permettra donc d'acheter ce qui coûte aujourd'hui

$$\frac{100}{1,02^{10}} = 100 \times 1,02^{-10} \approx 82,03 \text{ €}. \text{ Son pouvoir d'achat aura baissé d'environ 18 \%}.$$

Réponse. L'équivalent d'environ 82,03 € d'aujourd'hui.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une valeur passée

Avec $C(x) = 2000 \times 1,05^x$, où x est compté depuis aujourd'hui, il y a trois ans correspond à $x = -3$:

$$C(-3) = 2000 \times 1,05^{-3} = \frac{2000}{1,05^3} \approx 1727,68 \text{ €}$$

Contrôle : $1727,68 \times 1,05^3 \approx 2000$. L'exposant négatif traduit un retour dans le passé : on divise par le coefficient au lieu de multiplier.

Réponse. Environ 1727,68 €.

Correction de l'exercice 10 - Dans le passé et dans le futur

Le prix après x années est $P(x) = 240 \times 1,07^x$.

Il y a deux ans ($x = -2$) :

$$P(-2) = 240 \times 1,07^{-2} = \frac{240}{1,1449} \approx 209,63 \text{ €}$$

Dans un an et demi ($x = 1,5$) : $P(1,5) = 240 \times 1,07^{1,5} \approx 265,64 \text{ €}$.

Un même modèle décrit le passé et le futur, à condition que le taux d'évolution soit resté (et reste) constant.

Réponse. Environ 209,63 € il y a deux ans, 265,64 € dans un an et demi.

Correction de l'exercice 11 - Taux semestriel et taux mensuel

Un semestre est une demi-année, un mois un douzième d'année :

$$c_{\text{sem}} = 1,03^{\frac{1}{2}} \approx 1,01489 \quad c_{\text{mois}} = 1,03^{\frac{1}{12}} \approx 1,002466$$

soit environ 1,49 % par semestre et 0,2466 % par mois.

Contrôle : $c_{\text{mois}}^6 \approx 1,01489$: six mois redonnent bien le coefficient semestriel, car $\left(1,03^{\frac{1}{12}}\right)^6 = 1,03^{\frac{1}{2}}$.

Réponse. $\approx 1,01489$ et $\approx 1,002466$.

Correction de l'exercice 12 - Une croissance qui ne peut pas durer

Le modèle est $T(x) = 50\,000 \times 1,4^x$, avec x en mois. Sur 3 ans, $x = 36$:

$$T(36) = 50\,000 \times 1,4^{36} \approx 9,1 \times 10^9$$

soit environ 9 milliards de téléchargements en un mois, plus que la population mondiale.

Le modèle exponentiel ne peut pas durer : une croissance de 40 % par mois finit toujours par se heurter à la taille du marché. Il est utile sur quelques mois, mais pas pour une prévision à 3 ans.

Réponse. Environ 9,1 milliards : prévision absurde, le modèle ne vaut que sur une courte durée.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur de période

L'erreur. Le coefficient 1,06 est **annuel** : l'exposant doit être une durée en **années**. L'élève a pris 18 mois pour 18 années, et trouve environ 28 543 €, presque trois fois le capital.

La correction. Dix-huit mois font 1,5 an :

$$10\,000 \times 1,06^{1,5} \approx 10\,913,37 \text{ €}$$

Si l'on tient à compter en mois, il faut utiliser le coefficient mensuel $1,06^{\frac{1}{12}}$:

$10\,000 \times \left(1,06^{\frac{1}{12}}\right)^{18}$ donne le même résultat.

Réponse. $10\,000 \times 1,06^{1,5} \approx 10\,913,37 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 14 - Datation par le carbone 14

La quantité est divisée par 2 tous les 5730 ans ; après x années, il en reste la proportion

$$0,5^{\frac{x}{5730}}$$

Pour $x = 2000$: $0,5^{\frac{2000}{5730}} \approx 0,7851$.

Il reste environ 78,5 % du carbone 14 initial. Inversement, en mesurant la proportion restante, on peut estimer l'âge d'un objet : c'est le principe de la datation, qui demandera de résoudre une équation (logarithme).

Réponse. Environ 78,5 %.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un plan d'épargne

a) $k = 4500 > 0$ et $a = 1,035 > 1$: S est strictement croissante, et $S(0) = 4500 \text{ €}$ est la somme placée.

b) $S(5) \approx 5344,59 \text{ €}$; $S(7,5) \approx 5824,59 \text{ €}$; $S(-1) = \frac{4500}{1,035} \approx 4347,83 \text{ €}$. Cette dernière valeur est la somme qu'il aurait fallu placer un an plus tôt pour disposer aujourd'hui de 4500 €.

c) $1,035^{0,5} \approx 1,01735$: environ 1,74 % par semestre.

d) En 12 ans, le capital est multiplié par

$$1,035^{12} \approx 1,5111$$

soit une hausse d'environ 51,1 %.

Réponse. b) $\approx 5344,59$ € ; $\approx 5824,59$ € ; $\approx 4347,83$ € — c) $\approx 1,74$ % — d) $\approx 1,5111$.