

Plaquette 2 - Propriétés algébriques

Fonctions exponentielles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés (pour $a > 0$, $b > 0$, x et y réels, n entier) :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad a^{nx} = (a^x)^n$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^x \times b^x = (ab)^x$$

Lecture économique. $1,03^2 \times 1,03^{2,5} = 1,03^{4,5}$: deux ans puis deux ans et demi de hausse à 3 % font quatre ans et demi de hausse.

⚠ **Ce qui est faux.**

Écriture fausse	Écriture juste
$a^x + a^y = a^{x+y}$	$a^x \times a^y = a^{x+y}$
$2^3 \times 2^4 = 4^7$	$2^3 \times 2^4 = 2^7$
$(a^x)^2 = a^{x+2}$	$(a^x)^2 = a^{2x}$

Correction de l'exercice 1 - Produit de deux puissances

Quand les bases sont égales, on **additionne** les exposants :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

a) $1,05^2 \times 1,05^3 = 1,05^{2+3} = 1,05^5 \approx 1,2763$. Deux années puis trois années de hausse à 5 % font cinq années de hausse, soit environ +27,63 %.

b) $2^{0,5} \times 2^{1,5} = 2^{0,5+1,5} = 2^2 = 4$.

On le vérifie autrement : $2^{0,5} = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $2^{1,5} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$, dont le produit vaut bien 4.

Réponse. a) $1,05^5 \approx 1,2763$ — b) $2^2 = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Quotient de deux puissances

Pour un quotient de même base, on **soustrait** les exposants :

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$.

b) $\frac{1,2^{x+1}}{1,2^x} = 1,2^{(x+1)-x} = 1,2^1 = 1,2$.

Interprétation : $\frac{C(x+1)}{C(x)} = 1,2$ quel que soit x . Le chiffre d'affaires est multiplié par 1,2 chaque année, soit une hausse de 20 % : le quotient de deux valeurs séparées d'une période est constant, comme pour une suite géométrique.

Réponse. a) 27 — b) 1,2 : hausse de 20 % par an.

Correction de l'exercice 3 - Puissance d'une puissance

On **multiplie** les exposants :

$$(a^x)^n = a^{nx}$$

a) $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64.$

b) $(1,1^x)^2 = 1,1^{2x}$, qu'on peut aussi écrire $(1,1^2)^x = 1,21^x.$

c) $(0,9^2)^{0,5} = 0,9^{2 \times 0,5} = 0,9^1 = 0,9$: la racine carrée d'un carré redonne le nombre positif de départ.

Une erreur fréquente consiste à additionner les exposants dans a) : $2^{3+2} = 32$ est faux.

Réponse. a) 64 — b) $1,1^{2x} = 1,21^x$ — c) 0,9.

Correction de l'exercice 4 - Changer de base

On écrit la base comme une puissance de 2, puis on multiplie les exposants :

a) $4 = 2^2$, donc $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}.$

b) $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, donc

$$0,25^x = (2^{-2})^x = 2^{-2x}$$

c) $8 = 2^3$, donc $8^x = 2^{3x}.$

La base 0,25 est comprise entre 0 et 1 : $x \mapsto 0,25^x$ est strictement décroissante. On le retrouve avec 2^{-2x} : quand x augmente, l'exposant $-2x$ diminue, et 2^{-2x} aussi.

Réponse. a) 2^{2x} — b) 2^{-2x} — c) 2^{3x} ; décroissante.

Correction de l'exercice 5 - Regrouper des évolutions

a) Les deux périodes s'enchaînent : on multiplie leurs coefficients, et les exposants s'additionnent.

$$1,03^2 \times 1,03^{2,5} = 1,03^{4,5}$$

b) $1,03^{4,5} \approx 1,1423$: le placement a augmenté d'environ 14,23 % en quatre ans et demi.

La propriété $a^{x+y} = a^x \times a^y$ traduit simplement l'enchaînement de deux durées de placement au même taux.

Réponse. a) $1,03^{4,5}$ — b) $\approx 1,1423$, soit +14,23 %.

Correction de l'exercice 6 - Simplifier une expression littérale

On écrit $2^{x+1} = 2^x \times 2^1 = 2 \times 2^x$, puis on factorise par 2^x :

$$2^{x+1} - 2^x = 2 \times 2^x - 2^x = (2 - 1) \times 2^x = 2^x$$

Avec $x = 2,5$: $2^{3,5} - 2^{2,5} = 2^{2,5} \approx 5,66.$

Contrôle à la calculatrice : $2^{3,5} \approx 11,31$ et $2^{2,5} \approx 5,66$, dont la différence vaut bien environ 5,66.

Réponse. $2^{x+1} - 2^x = 2^x$; $2^{3,5} - 2^{2,5} = 2^{2,5} \approx 5,66.$

Correction de l'exercice 7 - Deux calculs égaux

D'après la règle $(a^x)^n = a^{nx}$:

$$(1,04^5)^2 = 1,04^{5 \times 2} = 1,04^{10}$$

Les deux nombres sont égaux (environ 1,4802).

Interprétation : $1,04^5$ est le coefficient de cinq années de placement. Placer un capital pendant dix ans revient à le placer deux fois de suite pendant cinq ans, chaque période multipliant le capital par $1,04^5$. Un capital qui gagne environ 21,67 % en cinq ans gagne environ 48,02 % en dix ans.

Réponse. $(1,04^5)^2 = 1,04^{10} \approx 1,4802$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre en reconnaissant une puissance

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement monotone : deux puissances de même base sont égales si et seulement si leurs exposants sont égaux.

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

a) $8 = 2^3$, donc $2^x = 2^3$ et $x = 3$.

b) $4 = 0,5^{-2}$ (car $0,5^{-2} = \frac{1}{0,25} = 4$), donc $x = -2$.

c) $0,001 = 10^{-3}$, donc $x = -3$.

Quand le second membre n'est pas une puissance « simple » de la base, on utilisera le logarithme décimal (chapitre suivant).

Réponse. a) 3 — b) -2 — c) -3.

Correction de l'exercice 9 - Vrai ou faux

a) **Faux** : on additionne les exposants, $3^x \times 3^y = 3^{x+y}$. Contre-exemple : $x = y = 1$ donne 9 d'un côté et $3^1 = 3$ de l'autre.

b) **Vrai** : c'est la définition des exposants négatifs.

c) **Vrai** : $2^x + 2^x = 2 \times 2^x = 2^1 \times 2^x = 2^{x+1}$.

d) **Vrai** : on multiplie les bases quand les exposants sont égaux,

$$2^x \times 3^x = (2 \times 3)^x = 6^x$$

Un contre-exemple numérique suffit à montrer qu'une égalité est fausse ; pour montrer qu'elle est vraie, il faut une règle de calcul valable pour tous les nombres.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai — d) vrai.

Correction de l'exercice 10 - Un taux semestriel

a) Deux semestres consécutifs multiplient le capital par $c \times c = c^2$, qui doit être égal au coefficient annuel 1,21. Comme $c > 0$:

$$c = 1,21^{\frac{1}{2}} = 1,21^{0,5}$$

b) $1,21^{0,5} = \sqrt{1,21} = 1,1$: le capital augmente de 10 % par semestre.

Contrôle : $1,1^2 = 1,21$. Le taux semestriel n'est pas $\frac{21}{2} = 10,5\%$: deux hausses de 10,5 % donneraient $1,105^2 \approx 1,2210$, soit plus de 21 %.

Réponse. b) $c = 1,1 : +10\%$ par semestre.

Correction de l'exercice 11 - Multiplier des bases

a) Les exposants sont égaux : on multiplie les bases.

$$1,2^x \times 0,9^x = (1,2 \times 0,9)^x = 1,08^x$$

b) La base 1,08 est supérieure à 1 : le chiffre d'affaires augmente de 8 % par an.

En 3 ans, il est multiplié par $1,08^3 \approx 1,2597$, soit une hausse d'environ 25,97 %. La hausse du prix l'emporte sur la baisse des ventes.

Réponse. a) $1,08^x$ — b) hausse de 8 % par an, environ +25,97 % en 3 ans.

Correction de l'exercice 12 - Remonter dans le temps

On additionne les exposants :

$$1,05^{-3} \times 1,05^5 = 1,05^{-3+5} = 1,05^2 = 1,1025$$

Remonter de trois ans divise l'indice par $1,05^3$ (exposant négatif) ; avancer de cinq ans le multiplie par $1,05^5$. Au total, l'indice est multiplié par $1,05^2$: on se retrouve deux ans après aujourd'hui, avec un indice supérieur de 10,25 %.

Les exposants jouent le rôle de durées : une durée négative correspond au passé.

Réponse. $1,05^2 = 1,1025$: deux ans plus tard, +10,25 %.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur

Première erreur. Pour un produit de même base, on garde la base et on **additionne** les exposants :

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

alors que $4^7 = 16\,384$. L'élève a multiplié les bases, ce qui n'est permis que lorsque les **exposants** sont égaux.

Seconde erreur. Pour une puissance de puissance, on **multiplie** les exposants :

$(1,5^x)^2 = 1,5^{2x}$. Contre-exemple pour l'écriture de l'élève : avec $x = 1$, on obtient $(1,5)^2 = 2,25$, alors que $1,5^3 = 3,375$.

Réponse. $2^3 \times 2^4 = 2^7$; $(1,5^x)^2 = 1,5^{2x}$.

Correction de l'exercice 14 - Un temps de doublement

a) En 10 ans, la population est multipliée par environ 2,0042 : elle **double** à peu près tous les 10 ans.

b) Vingt ans, ce sont deux périodes de dix ans :

$$1,072^{20} = \left(1,072^{10}\right)^2 \approx 2,0042^2 \approx 4,017$$

La population est multipliée par environ 4 en 20 ans. Une croissance de 7,2 % par an n'a pas l'air spectaculaire, mais elle quadruple une population en vingt ans : c'est l'effet de la croissance exponentielle.

Réponse. a) doublement en environ 10 ans — b) environ 4,017, soit un quadruplement.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un loyer indexé

a) $L(4) = 12\,000 \times 1,025^4 \approx 13\,245,75$ € et $L(-2) = 12\,000 \times 1,025^{-2} \approx 11\,421,77$ €.

b) Avec la propriété $a^{x+1} = a^x \times a$:

$$L(x+1) = 12\,000 \times 1,025^x \times 1,025 = 1,025 \times L(x)$$

le loyer augmente bien de 2,5 % chaque année.

c) $\frac{L(4)}{L(-2)} = \frac{1,025^4}{1,025^{-2}} = 1,025^{4-(-2)} = 1,025^6 \approx 1,1597$: entre ces deux dates, séparées de six ans, le loyer augmente d'environ 15,97 %.

Réponse. a) $\approx 13\,245,75$ € et $\approx 11\,421,77$ € — c) $1,025^6 \approx 1,1597$.