

Plaquette 3 – Sens de variation des fonctions $k \cdot a^x$

Fonctions exponentielles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sens de variation de $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) :

Base	Variation
$a > 1$	strictement croissante
$0 < a < 1$	strictement décroissante
$a = 1$	constante

Sens de variation de $x \mapsto k \times a^x$: multiplier par $k > 0$ conserve le sens de variation, multiplier par $k < 0$ l'inverse.

	$a > 1$	$0 < a < 1$
$k > 0$	croissante	décroissante
$k < 0$	décroissante	croissante

Signe. Comme $a^x > 0$, la fonction $k \times a^x$ est toujours du signe de k .

Comparer. Pour $a > 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$. Pour $0 < a < 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$.

$$f(x) = k \times a^x \quad f(0) = k$$

Correction de l'exercice 1 – Croissante ou décroissante ?

On compare la base à 1.

- a) $1,3 > 1$: f est strictement **croissante**.
- b) $0 < 0,8 < 1$: g est strictement **décroissante**.
- c) $1^x = 1$ pour tout x : h est **constante**, sa courbe est la droite d'équation $y = 1$.
- d) $\frac{5}{4} = 1,25 > 1$: k est strictement **croissante**.

Une base supérieure à 1 modélise une hausse en pourcentage, une base entre 0 et 1 une baisse :

$$1,3 = 1 + 0,3 \quad 0,8 = 1 - 0,2$$

Réponse. a) croissante — b) décroissante — c) constante — d) croissante.

Correction de l'exercice 2 – Le rôle du coefficient k

On détermine d'abord le sens de variation de a^x , puis on regarde le signe de k : un k positif le conserve, un k négatif l'inverse.

- a) $1,1 > 1$ et $k = 500 > 0$: f est croissante.
- b) $1,5 > 1$, donc $1,5^x$ croît ; $k = -2 < 0$ inverse : g est **décroissante**.
- c) $0,6 < 1$ et $k = 3 > 0$: h est décroissante.
- d) $0,5 < 1$, donc $0,5^x$ décroît ; $k = -4 < 0$ inverse : m est **croissante**.

Contrôle sur d) : $m(0) = -4$ et $m(1) = -4 \times 0,5 = -2$, plus grand que -4 :

$$m(1) > m(0)$$

Réponse. a) croissante — b) décroissante — c) décroissante — d) croissante.

Correction de l'exercice 3 - Comparer sans calculatrice

On utilise le sens de variation de $x \mapsto a^x$.

a) $1,2 > 1$, la fonction est croissante : comme $3 < 5$, on a $1,2^3 < 1,2^5$.

b) $0,7 < 1$, la fonction est décroissante : comme $2 < 4$, l'ordre s'inverse, $0,7^2 > 0,7^4$.

c) $3 > 1$ et $-1 < 0,5$, donc

$$3^{-1} < 3^{0,5}$$

Contrôle : $3^{-1} \approx 0,33$ et $3^{0,5} \approx 1,73$. Avec une base inférieure à 1, il faut penser à inverser l'ordre.

Réponse. a) $1,2^3 < 1,2^5$ — b) $0,7^2 > 0,7^4$ — c) $3^{-1} < 3^{0,5}$.

Correction de l'exercice 4 - Choisir un modèle

Une évolution de $t\%$ par an correspond au coefficient $1 + \frac{t}{100}$ (hausse) ou $1 - \frac{t}{100}$ (baisse).

a) Baisse de 4 % : coefficient 0,96, fonction g , décroissante.

b) Hausse de 4 % : coefficient 1,04, fonction f , croissante.

c) Hausse de 40 % : coefficient 1,4, fonction h , croissante et beaucoup plus rapide.

Après 5 ans par exemple :

$$f(5) \approx 1824,98 \quad g(5) \approx 1223,06 \quad h(5) \approx 8067,36$$

Réponse. a) g — b) f — c) h .

Correction de l'exercice 5 - Un tableau de variations

a) $0 < 0,9 < 1$, donc $x \mapsto 0,9^x$ est décroissante ; $k = 200 > 0$ conserve ce sens : f est **strictement décroissante**.

b) Aux bornes : $f(0) = 200$ et

$$f(10) = 200 \times 0,9^{10} \approx 69,74$$

x	0		10
$f(x)$	200	$\searrow$	69,74

L'équipement perd environ 65 % de sa valeur en dix ans ; au bout de 5 ans, il ne vaut plus que $200 \times 0,9^5 \approx 118,10$ milliers d'euros.

Réponse. a) décroissante — b) de 200 à environ 69,74.

Correction de l'exercice 6 - Lire une courbe exponentielle

a) Les ventes doublent quand $f(x) = 200$. On lit que la courbe atteint l'ordonnée 200 pour une abscisse un peu supérieure à 3.

b) On calcule les images de part et d'autre :

$$f(3) = 100 \times 1,25^3 \approx 195,31 \quad f(3,2) \approx 204,23$$

Comme f est croissante, le doublement a lieu entre 3 et 3,2 ans ; avec $f(3,1) \approx 199,72$, on précise : un peu après 3,1 ans.

Le chapitre sur le logarithme décimal permettra de calculer cette durée exactement.

Réponse. Les ventes doublent un peu après 3,1 ans.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux bases

a) $f(10) = 1,02^{10} \approx 1,2190$ et $g(10) = 1,05^{10} \approx 1,6289$: en dix ans, +21,9 % contre +62,89 %.

b) $\frac{g(x)}{f(x)} = \left(\frac{1,05}{1,02}\right)^x$ et $\frac{1,05}{1,02} > 1$:

$$\left(\frac{1,05}{1,02}\right)^x > 1 \text{ pour } x > 0$$

donc $g(x) > f(x)$ pour $x > 0$: la plus grande base l'emporte dans le futur. Pour $x < 0$, l'inégalité s'inverse, $g(x) < f(x)$: en remontant dans le passé, le placement à 5 % partait d'une valeur relative plus faible. Les deux courbes se croisent en $(0; 1)$.

Réponse. a) $\approx 1,2190$ et $\approx 1,6289$ — b) $g > f$ pour $x > 0$, $g < f$ pour $x < 0$.

Correction de l'exercice 8 - Encadrer une solution

a) À la calculatrice : $1,5^{2,7} \approx 2,988$, $1,5^{2,8} \approx 3,112$ et $1,5^{2,71} \approx 3,001$.

b) La fonction $x \mapsto 1,5^x$ est strictement croissante (base $1,5 > 1$). Elle vaut 3 pour une valeur α comprise entre 2,70 et 2,71, et

$$1,5^x > 3 \Leftrightarrow x > \alpha$$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, avec $\alpha \approx 2,71$ à 0,01 près. Avec une base inférieure à 1, l'inégalité aurait été renversée.

Réponse. $x > \alpha$ avec $\alpha \approx 2,71$.

Correction de l'exercice 9 - Un médicament qui s'élimine

a) $0 < 0,7 < 1$ et $k = 80 > 0$: Q est strictement décroissante.

b) 2 h 30 min font $t = 2,5$: $Q(2,5) = 80 \times 0,7^{2,5} \approx 32,80$ mg. Après 4 h :

$$Q(4) = 80 \times 0,7^4 \approx 19,21 \text{ mg}$$

c) On calcule les quantités heure par heure : $Q(5) \approx 13,45$ mg et $Q(6) \approx 9,41$ mg. Comme Q est décroissante, il reste moins de 10 mg à partir de la sixième heure.

Réponse. b) environ 32,80 mg et 19,21 mg — c) à partir de 6 h.

Correction de l'exercice 10 - Un modèle qui plafonne

a) $V(0) = 1000 - 600 = 400$; $V(5) = 1000 - 600 \times 0,8^5 \approx 803,39$; $V(10) \approx 935,58$.

b) $x \mapsto 0,8^x$ est décroissante ; multipliée par $k = -600 < 0$, elle devient croissante ; ajouter 1000 ne change pas le sens de variation. V est donc **croissante**.

c) Pour tout x , $600 \times 0,8^x > 0$, donc

$$V(x) = 1000 - 600 \times 0,8^x < 1000$$

Les ventes cumulées s'approchent de 1000 milliers sans les atteindre : le marché finit par être saturé.

Réponse. a) 400 ; $\approx 803,39$; $\approx 935,58$ — b) croissante — c) non, elles restent sous 1000.

Correction de l'exercice 11 - Le signe d'une fonction $k \cdot a^x$

Pour tout réel x et toute base $a > 0$, on a

$$a^x > 0$$

Donc $f(x) = -5 \times 1,2^x$ est le produit d'un nombre négatif par un nombre positif : $f(x) < 0$ pour tout x . De même, $g(x) = 7 \times 0,3^x > 0$.

La courbe de f reste strictement sous l'axe des abscisses et ne le coupe jamais : l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. Une fonction $k \times a^x$ a toujours le signe de k .

Réponse. $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$ pour tout x ; la courbe de f ne coupe pas l'axe.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

L'erreur. L'élève n'a regardé que la base. $x \mapsto 2^x$ est bien croissante, mais le coefficient $k = -3$ est **négatif** : multiplier par un nombre négatif inverse le sens de variation. f est donc **décroissante**.

Vérification.

$$f(0) = -3 \times 1 = -3 \quad f(1) = -3 \times 2 = -6$$

$f(1) < f(0)$: quand x augmente, $f(x)$ diminue.

Il faut toujours examiner **les deux** paramètres : la base a et le signe de k .

Réponse. f est décroissante : $k = -3 < 0$ inverse le sens de 2^x .

Correction de l'exercice 13 - Un modèle de croissance à choisir

a) $V(1) = 40 \times a^1 = 40a = 46$, donc

$$a = \frac{46}{40} = 1,15$$

Les ventes augmentent de 15 % par an, et $V(0) = 40$ milliers au départ.

b) $a = 1,15 > 1$ et $k = 40 > 0$: V est strictement croissante. Les ventes progressent de plus en plus en valeur absolue : $V(2) = 40 \times 1,15^2 = 52,9$ milliers, soit 6,9 milliers de plus qu'en $x = 1$, contre 6 milliers entre $x = 0$ et $x = 1$.

Réponse. a) $a = 1,15$: +15 % par an — b) croissante.

Correction de l'exercice 14 - Positions de deux courbes

f est strictement croissante (base $1,1 > 1$) et $f(0) = 1$.

Si $x > 0$, alors $f(x) > f(0)$, soit $f(x) > 1$; si $x < 0$, alors $f(x) < 1$:

$$x > 0 \Leftrightarrow 1,1^x > 1$$

Interprétation : $1,1^x$ est le coefficient du capital après x années. Dans le futur ($x > 0$), il est supérieur à 1 : le capital a augmenté. Dans le passé ($x < 0$), il est inférieur à 1 : le capital valait moins qu'aujourd'hui. Par exemple $1,1^{-2} = \frac{1}{1,21} \approx 0,826$.

Réponse. $f(x) > 1$ pour $x > 0$, $f(x) < 1$ pour $x < 0$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux salaires

a) Les bases 1,06 et 1,03 sont supérieures à 1, et les coefficients 2000 et 2600 positifs : f et g sont strictement croissantes.

b) À la calculatrice :

t	8	9	10
$f(t)$	3187,70	3378,96	3581,70
$g(t)$	3293,60	3392,41	3494,18

c) Le premier salaire reste inférieur jusqu'à $t = 9$, puis dépasse le second en $t = 10$:

$$f(10) \approx 3581,70 > g(10) \approx 3494,18$$

À partir de la dixième année, le salarié le plus augmenté gagne davantage : une croissance plus forte finit par rattraper un écart de départ.

Réponse. a) bases supérieures à 1, coefficients positifs — c) à partir de la dixième année.